

Term Spécialité/Compléments sur la dérivation et convexité

1. Dérivées de fonctions composées : (+4 exercices pour les enseignants)

Exercice 2337

Le tableau présente pour chaque ligne une fonction et l'expression de la dérivée. Etablir l'exactitude de chaque ligne.

Fonction	Image de x	Nombre dérivé en x
f	$(3x + 2)^6$	$18 \cdot (3x + 2)^5$
g	$4 \cdot (3 - 2x)^4$	$-32 \cdot (3 - 2x)^3$
h	$\frac{1}{-2x^2 + 3x + 1}$	$\frac{4x - 3}{(2x^2 - 3x - 1)^2}$
j	$\sqrt{5x^2 + 6x - 2}$	$\frac{5x + 3}{\sqrt{5x^2 + 6x - 2}}$
k	$\frac{2x - 1}{\sqrt{3 - x}}$	$\frac{2x - 11}{2 \cdot (x - 3) \cdot \sqrt{3 - x}}$

Exercice 3506

Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonction suivantes :

a. $f(x) = (3 \cdot x + 5)^5$ b. $g(x) = \frac{1}{3 \cdot x^4 + 11}$

c. $h(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ d. $j(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$

Exercice 95

On considère la fonction f définie par :

$$f: x \mapsto \sqrt{-2x^2 - x + 6}$$

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- Donner l'expression de la fonction dérivée de la fonction f .

Exercice 5217

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty; -\frac{1}{2}]$ par la relation par la relation suivante :

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x - 2}$$

Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f en -1

Exercice 8399

Déterminer l'expression, sous forme simplifiée, de la fonction f' dérivée de la fonction f définie par :

$$f(x) = (\sqrt{x + 1})^3$$

Exercice 8400

Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner l'expression simplifiée de leur fonction dérivée :

a. $f(x) = (3x^2 - 2x + 1)\sqrt{x}$ b. $g(x) = (2x + 1) \cdot \sqrt{3 - x}$

2. Dérivées de fonctions composées de la fonction exponentielle : (+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 8410

Pour chaque fonction, déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

a. $f(x) = e^{2-x^2}$ b. $f(x) = e^{x^2+1}$ c. $f(x) = e^{x^2+x+1}$

Exercice 8420

Pour chaque fonction, déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

a. $f(x) = (2 \cdot x + 1)e^{x+1}$ b. $f(x) = x \cdot e^{3 \cdot x^2}$

3. Dérivées de familles de fonctions : (+1 exercice pour les enseignants)

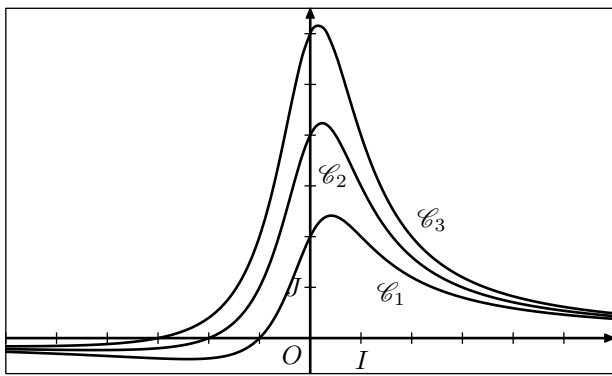
Exercice 6810

On considère pour tout entier naturel n non-nul, la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par la relation :

$$f_n(x) = \frac{2 \cdot (x + n)}{1 + x^2}$$

Dans un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on note \mathcal{C}_n la courbe

représentative de la fonction f_n .



1. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f'_n .
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente (d_n) à la courbe \mathcal{C}_n au point d'abscisse 1.
3. a. Etablir l'égalité suivante :

$$n \cdot x^3 - (2 \cdot n + 1) \cdot x^2 + (n + 2) \cdot x - 1 = (x - 1)^2 \cdot (n \cdot x - 1)$$
- b. Etudier la position relative de la droite (d_n) et de la courbe \mathcal{C}_n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.

4. Tangente de fonctions composées :

Exercice 7740



On considère la fonction g définie par la relation :

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$$

On note \mathcal{C}_g la courbe représentative de la fonction g .

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g .
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_g au point d'abscisse $\frac{3}{2}$.

Exercice 6919



On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

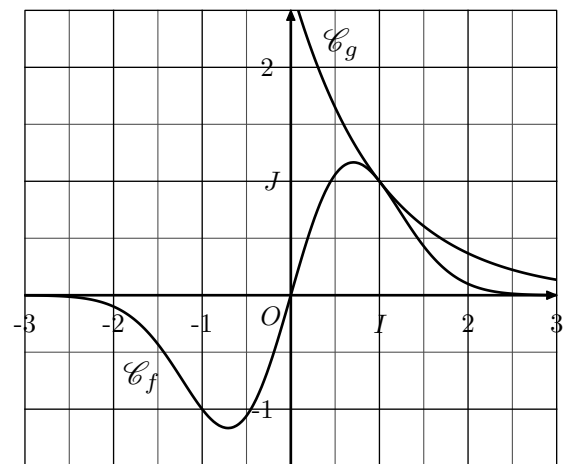
$$f(x) = x \cdot e^{1-x^2}$$

et la fonction g définie pour tout réel x par :

$$g(x) = e^{1-x}$$

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les

courbes représentatives \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g respectivement des fonctions f et g .



Justifier qu'au point d'abscisse 1, les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g admettent la même tangente.

5. Tableau de variations d'une fonction composée :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 5752



On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \sqrt{6x^2 + 13x - 5}$$

1. Justifier que la fonction f admet pour ensemble de déf-

inition la partie I de \mathbb{R} définie par :

$$I =]-\infty; -\frac{5}{2}] \cup [\frac{1}{3}; +\infty[.$$

2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur son ensemble de définition I .

6. Etude de la fonction dérivée de fonctions composées :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 5062



On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x) = (5x^2 + 3x + 2)^5$$

1. Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f .
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f

Exercice 5063

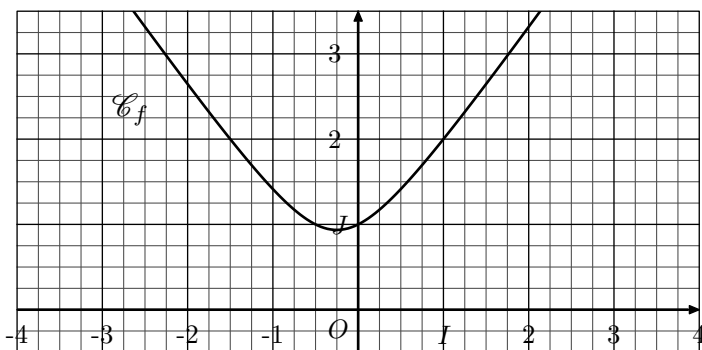


On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
2. Déterminer le tableau de variations de la fonction f .
3. Dans un repère $(O; I; J)$, on donne la courbe \mathcal{C}_f

représentative de la fonction f :



- Déterminer l'équation de la tangente (d) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.
- Tracer la droite (d) dans le repère ci-dessus.

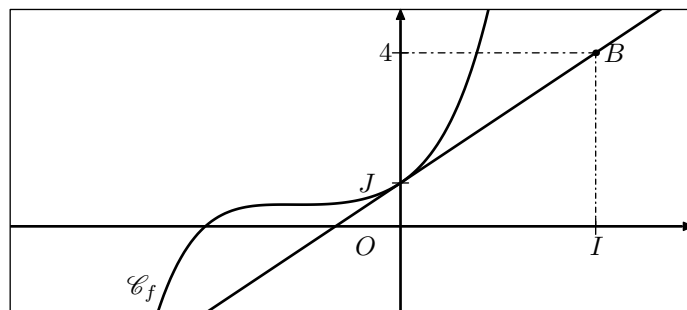
Exercice 6163



On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = (a \cdot x + 1) \cdot (2x^2 + x + 1)^2$$

Dans un repère $(O; I; J)$ orthogonal donné ci-dessous, on représente la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f :



La droite (d) passe par les points J et $B(1; 4)$.

- Justifier que la courbe \mathcal{C}_f passe par le point J .
 - Déterminer le coefficient de la droite (JB) .
 - Démontrer que tout réel x , on a :

$$f'(x) = [10ax^2 + (3a+8) \cdot x + (a+2)] \cdot (2x^2 + x + 1)$$
 - On suppose que la droite (JB) est tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point J . Déterminer la valeur de a . Justifier votre réponse.
- On admet que f' a pour expression :

$$f'(x) = (10x^2 + 11x + 3)(2x^2 + x + 1)$$
 Déterminer les sens de variation de la fonction f sur \mathbb{R} .

7. Lien entre dérivée et nombre dérivée :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 5064



Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^4 - 81}{h}$

b. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{6 \cdot h + 1} - 1}{h}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1)^8 - 1}{x}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 4} - 2}{x}$

Exercice 5829



Soit f une fonction numérique dérivable.

- Soit $a \in \mathcal{D}_f$. Etablir la limite suivante :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{x \cdot f(a) - a \cdot f(x)}{x - a} = f(a) - a \cdot f'(a)$$

On posera : $x = a+h$.

- En déduire la limite : $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{x^3 \cdot a - a^3 \cdot x}{x - a}$

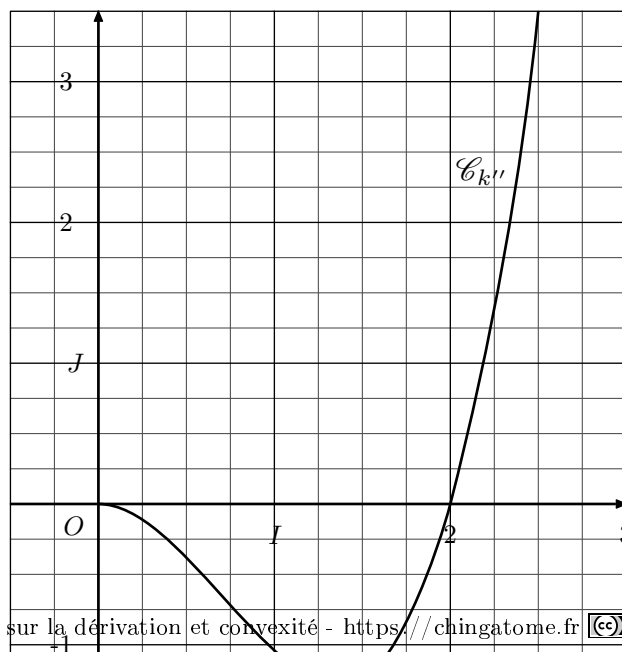
8. Convexité: graphiquement :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 7011



On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la dérivée seconde k'' d'une fonction k définie sur $[0; +\infty[$.



Parmi les réponses proposées, laquelle est correcte?

1. k est concave sur l'intervalle $[1; 2]$.
2. k est convexe sur l'intervalle $[0, 2]$.
3. k est convexe sur $[0; +\infty[$.
4. k est concave sur $[0; +\infty[$.

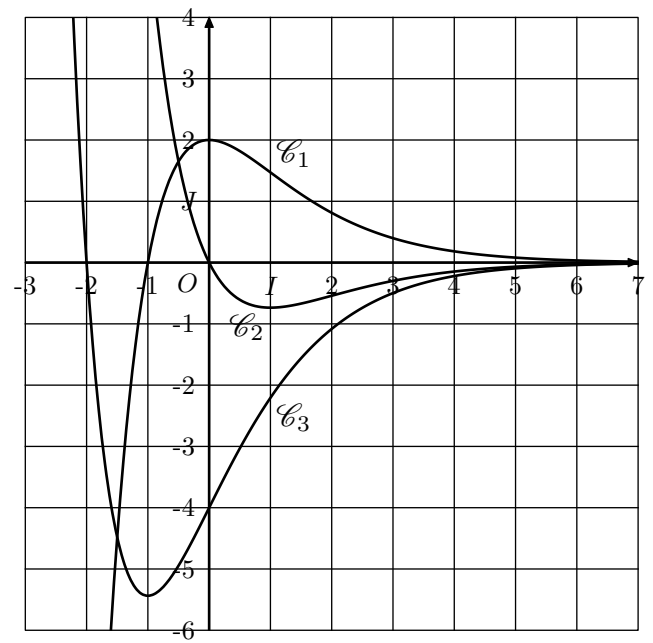
Exercice 7054



Dans le repère orthogonal ci-dessous trois courbes \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 définies sur $[-3; 7]$ ont été représentées. L'une de ces fonctions représente une fonction f , une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde.

Expliquer comment ces représentations graphiques permettent de déterminer la convexité de la fonction f .

Indiquer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe.



9. Convexité: étude de fonctions :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 7730



Parmi les propositions suivantes, laquelle est exacte.

La fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x^3 - 9 \cdot x$ est convexe sur l'intervalle:

- a. $]-\infty; +\infty[$
- b. $[0; +\infty[$
- c. $]-\infty; 0]$
- d. $[-3; 3]$

Exercice 7793



On considère la fonction f définie, pour tout réel x de l'intervalle $[-2; 4]$ par: $f(x) = (x+2) \cdot e^{-x+1}$

On note f' la fonction dérivée de f .

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[-2; 4]$, on a: $f'(x) = -(x+1) \cdot e^{-x+1}$
2. Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants:

1	factoriser(dériver $[-(x+1) \cdot \exp(-x+1)]$) $x \cdot \exp(-x+1)$
2	intégrer $[(x+2) \cdot \exp(-x+1)]$ $-(x+3) \cdot \exp(-x+1)$

En utilisant ces résultats, répondre à la question suivante:

10. Convexité et positions des tangentes :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 7794



On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; 10]$ par: $f(x) = -x \cdot \ln(x) + 2 \cdot x + 1$

Déterminer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe. Justifier.

Exercice 7026



Soit f la fonction définie sur $[0; 8]$ par:

$$f(x) = \frac{0,4}{20 \cdot e^{-x} + 1} + 0,4$$

1. Montrer que $f'(x) = \frac{8 \cdot e^{-x}}{(20 \cdot e^{-x} + 1)^2}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .
2. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous:

1	$f'(x) := 8 \cdot e^{-x} / (20 \cdot e^{-x} + 1)^2$ $f'(x) := \frac{8 \cdot e^{-x}}{400 \cdot (e^{-x})^2 + 40 \cdot e^{-x} + 1}$
2	$g(x) := \text{Dérivée}[f'(x)]$ $g(x) := \frac{160 \cdot (e^{-x})^2 - 8 \cdot e^{-x}}{8000 \cdot (e^{-x})^3 + 1200 \cdot (e^{-x})^2 + 60 \cdot e^{-x} + 1}$
3	Factoriser $[g(x)]$ $8 \cdot e^{-x} \cdot \frac{20 \cdot e^{-x} - 1}{(20 \cdot e^{-x} + 1)^3}$

En s'appuyant sur ces résultats, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère.

Montrer que la courbe \mathcal{C} est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle $]0; 10]$.

11. Point d'inflexion : graphiquement :

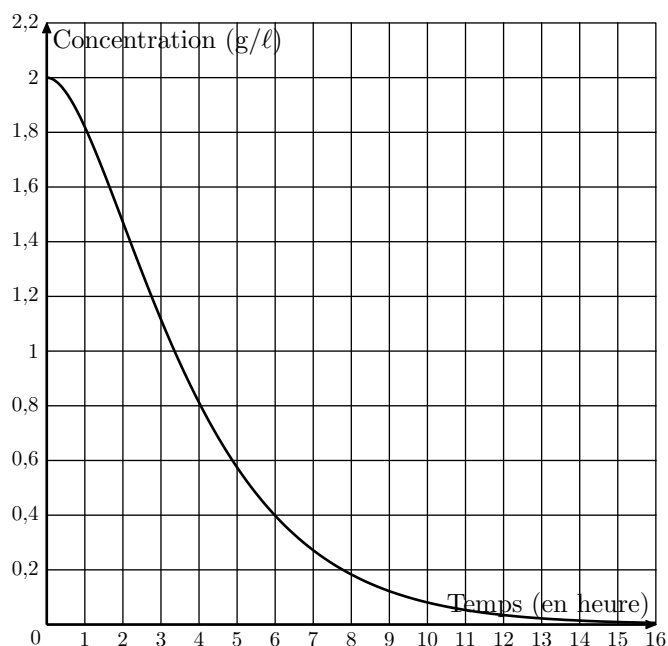
(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 7050



On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes en litres, de ce médicament dans le sang.

On obtient la courbe fournie ci-dessous :



En vous aidant d'une lecture graphique et sans justifier, au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle ?

12. Point d'inflexion : étude de fonctions :

(+2 exercices pour les enseignants)

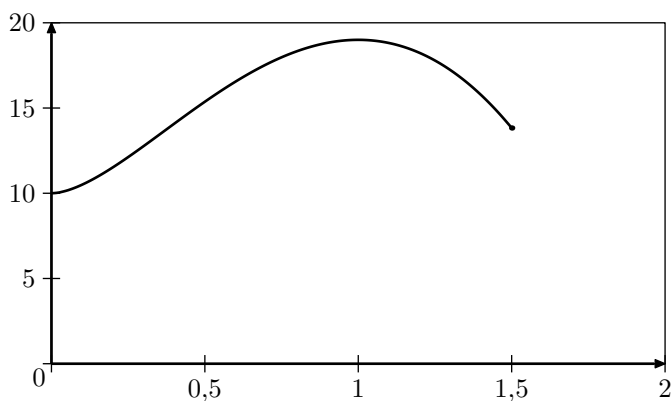
Exercice 7020



On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; 15]$ par :

$$f(x) = 9 \cdot x^2 \cdot (1 - 2 \cdot \ln x) + 10.$$

La courbe représentative de f est donnée ci-dessous :



On admet que $f''(x) = -36 \cdot \ln x - 36$ où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f sur l'intervalle $]0; 1,5]$.

Montrer que la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion dont l'abscisse est e^{-1} .

Exercice 7791



On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-20; 20]$ par :

$$f(x) = (-2 \cdot x + 30) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$$

1. a. Montrer que $f'(x) = (-0,4 \cdot x + 4) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$ pour tout

réel x de l'intervalle $[-20; 20]$.

- b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-20; 20]$.
On précisera la valeur exacte du maximum de f .
2. a. Montrer que, sur l'intervalle $[-20; 20]$, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α .
- b. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,2.
3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	Dériver $(-10 \cdot x + 200) \cdot e^{0,2 \cdot x + 3}$ $(-2 \cdot x + 30) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$
2	Dériver $(2 \cdot x + 30) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$ $(-0,4 \cdot x + 4) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$
3	Dériver $(-0,4 \cdot x + 4) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$ $(-0,08 \cdot x + 0,4) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$

Répondre à la question suivante en utilisant les résultats donnés par le logiciel :

Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe et préciser l'abscisse du point d'inflexion.

Exercice 7790



On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{0,5 + 100 \cdot e^{-x}}$$

On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0; 10]$.

1. Montrer que, pour tout réel x dans l'intervalle $[0; 10]$, on a :

$$f'(x) = \frac{100 \cdot e^{-x}}{(0,5 + 100 \cdot e^{-x})^2}$$

On note f'' la fonction dérivée seconde de f sur l'intervalle $[0; 10]$.

Un logiciel de calcul formel fournit l'expression suivante de $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{100 \cdot e^{-x} \cdot (100 \cdot e^{-x} - 0,5)}{(0,5 + 100 \cdot e^{-x})^3}$$

2. a. Montrer que, dans l'intervalle $[0; 10]$, l'inéquation $100 \cdot e^{-x} - 0,5 \geq 0$ est équivalente à l'inéquation : $x \leq -\ln(0,005)$.
- b. En déduire le tableau de signes de la fonction f'' sur l'intervalle $[0; 10]$.
3. On appelle \mathcal{C}_f la courbe représentative de f tracée dans un repère. Montrer, à l'aide de la question 2., que la courbe \mathcal{C}_f admet un point d'inflexion noté I , dont on précisera la valeur exacte de l'abscisse.
4. En utilisant les résultats de la question 2., déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est concave.

255. Exercices non-classés :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 1984



On considère la fonction : $f : x \mapsto \sqrt{-2 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 3}$

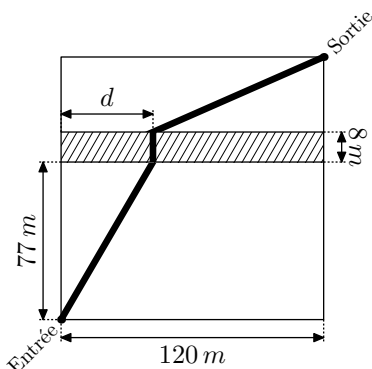
1. Montrer l'égalité suivante :
- $$(2 \cdot x - 1)(3 - x) = -2 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 3$$
2. a. Etudier le signe de $-2 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 3$ en fonction de la valeur de x .
- b. En déduire l'ensemble de définition et de dérivabilité de la fonction f .
3. Donner l'expression de la fonction dérivée de la fonction f .
4. Dresser le tableau de variations de la fonction f .

Exercice 8215



La ville "Promenade" souhaite emménager un terrain de forme carré traversé par une rivière traversant latéralement le terrain.

La figure ci-dessous représente le terrain et la rivière est la partie hachurée :



A quelle distance d doit-on placer le pont pour que la distance parcourue par un visiteur soit minimale ?

Exercice 111



On considère un segment $[AB]$ de longueur 10 centimètres et un point M de ce segment, différent de A et B . Les points N et P sont tels que $AMNP$ est un carré.

L'objectif de l'exercice est de déterminer le point M du segment $[AB]$ pour lequel la distance BN est minimale.

Les distances sont exprimées en centimètres.

1. On pose : $AM = x$.
- a. Faire une figure.
- b. Déterminer l'intervalle des valeurs possibles pour x .
- c. Déterminer en fonction de x la distance BM .
- d. Déterminer en fonction de x la distance BN .
(On rappelle le théorème de Pythagore : dans un triangle ABC rectangle en A , on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$)
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par : $f(x) = \sqrt{2 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 100}$
- La fonction dérivée f' de f est définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par : $f'(x) = \frac{2x - 10}{\sqrt{2 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 100}}$.
- a. Répondre aux questions suivantes
- i. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 10]$
- ii. Montrer que la fonction f admet un minimum sur l'intervalle $[0; 10]$ que l'on précisera.
- b. Répondre aux questions suivantes :
- i. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité un centimètre.
- ii. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 8$. On fera apparaître les traits de construction utiles et on donnera des valeurs approchées des solutions lues.
3. En utilisant les résultats précédents, déterminer le point M du segment $[AB]$ pour lequel la distance BN est minimale.