Terminale Spécialité/Annales sur les probabilités

1. Probabilités et suites :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 3188

Pierre et Claude jouent au tennis. Les deux joueurs ont la même chance de gagner la première partie. Par la suite, lorsque Pierre gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,7. Et s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est 0,8.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul. On considère les évènements :

- G_n : "*Pierre gagne la n-ième partie*".
- P_n : "*Pierre perd la n-ième partie*".

On pose : $p_n = \mathcal{P}(G_n)$ et $q_n = \mathcal{P}(P_n)$.

1. Recherche d'une relation de récurrence.
   a. Déterminer p_1 puis les probabilités conditionnelles $\mathcal{P}_{G_1}(G_2)$ et $\mathcal{P}_{P_1}(G_2)$.
   b. Justifier l'égalité : $p_n + q_n = 1$.
   c. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = 0{,}5 \cdot p_n + 0{,}2$.
2. Etude de la suite (p_n).

   On pose, pour tout entier naturel n non nul, $v_n = p_n - \dfrac{2}{5}$.
   a. Prouver que la suite (v_n) est une suite géométrique et exprimer v_n en fonction de n.
   b. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4326

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement "*le joueur gagne la n-ième partie*" ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

On a donc : $p_1 = 0{,}1$

1. Montrer que $p_2 = 0{,}62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première. *(on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près).*
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières.
4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :
   $p_{n+1} = \dfrac{1}{5} \cdot p_n + \dfrac{3}{5}$.
5. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :
   $p_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4} \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$
6. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.
7. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on :
   $\dfrac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$?

Exercice 6800

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté pile et un côté face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.
Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux piéves.
Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1-a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.

   i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1

```
Fonction f(n)
    a ← 0
    b ← 0
    Pour i allant de 1 à n faire
        d ← d'un entier
           aléatoire compris entre 1 et 6
        Si  d⩽ 2
            Alors a ←  1−a
            Sinon
                Si  d⩽ 4
                    Alors b ←  1−b
                Fin Si
        Fin Si
        s ←  a+b
    Fin Pour
    Renvoyer s
```

   a. On appelle la fonction `f` avec pour argument `n`$=3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 6 et 4.
   Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de

l'algorithme :

variables	i	d	a	b	s
initialisation					
1^{er} passage boucle Pour					
2^e passage boucle Pour					
3^e passage boucle Pour					

b. L'appel à la fonction `f` permet-il de décider si à la fin les deux pièces sont du côté pile?

2. Pour tout entier naturel n, on note :

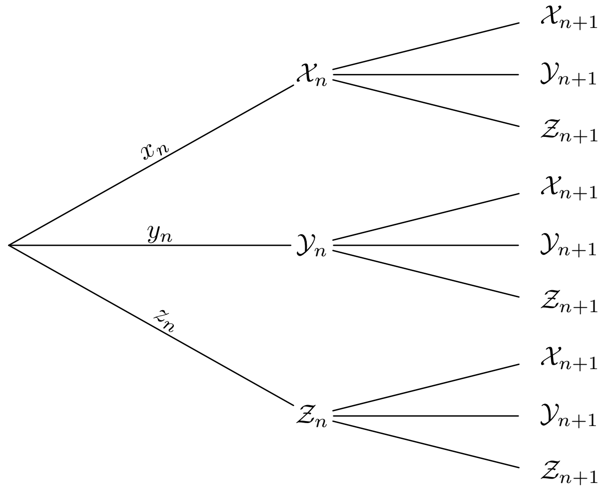
- $\mathcal{X}_n$ l'évènement : "*A l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté face*"
- $\mathcal{Y}_n$ l'évènement : "*A l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face*"
- $\mathcal{Z}_n$ l'évènement : "*A l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté pile*".

De plus on note, $x_n = \mathcal{P}(\mathcal{X}_n)$, $y_n = \mathcal{P}(\mathcal{Y}_n)$ et $z_n = \mathcal{P}(\mathcal{Z}_n)$ les probabilités respectives des évènements $\mathcal{X}_n$, $\mathcal{Y}_n$ et $\mathcal{Z}_n$:

a. Donner les probabilités x_0, y_0 et z_0 respectives qu'au début du jeu il y ait 0, 1 ou 2 pièces du côté pile.

b. Justifier que : $\mathcal{P}_{\mathcal{X}_n}(\mathcal{X}_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$

c. Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les probabilités sur ses branches, certaines pouvant être nulles :



d. Pour tout entier naturel n, exprimer z_n en fonction de x_n et y_n.

e. En déduire que, pour tout entier naturel n, :
$$y_{n+1} = -\frac{1}{3}\cdot y_n + \frac{2}{3}$$

f. On pose, pour tout entier naturel n : $b_n = y_n - \dfrac{1}{2}$
Montrer que la suite (b_n) est géométrique.
En déduire que, pour tout entier naturel n :
$$y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

g. Calculer $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} y_n$.
Interpréter le résultat.

2. *Probabilités conditionnelles :*

(+1 exercice pour les enseignants)

Remarque : Conforme au programme de 2012 mais plus orienté vers les anciennes sessions

Exercice 1449

Un joueur dispose d'une urne contenant 3 boules rouges, 4 boules blanches et n boules vertes $(0 \leqslant n \leqslant 10)$. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. Le joueur tire au hasard une boule de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

a. R : "*la boule tirée est rouge*".

b. B : "*la boule tirée est blanche*".

c. V : "*la boule tirée est verte*".

2. Le joueur décide de jouer une partie. Celle-ci se déroule de la manière indiquée ci-dessous.
Le joueur tire une boule de l'urne :

- si elle est rouge, il gagne 16 F ;
- si elle est blanche, il perd 12 F ;
- si elle est verte, il remet la boule dans l'urne, puis tire une boule de l'urne ;
  - si cette boule est rouge, il gagne 8 F ;
  - si cette boule est blanche, il perd 2 F ;
  - si cette boule est verte, il ne perd rien ni ne gagne rien.

Les tirages sont équiprobables et deux tirages successifs sont indépendants.
Au début de la partie, le joueur possède 12 F. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme que le joueur possède à l'issue de la partie *(un tirage ou deux tirages selon le cas)*.

a. Déterminer les valeurs prises par $\mathcal{X}$.

b. Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.

c. Montrer que l'espérance mathématique de $\mathcal{X}$ est :
$$E(\mathcal{X}) = 12 + 16\cdot\frac{n}{(n+7)^2}.$$

3. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par : $f(x) = \dfrac{x}{(x+7)^2}$
Etudier les variations de f.

4. En déduire la valeur de n pour laquelle l'espérance mathématique $\mathcal{X}$ est maximale. Calculer cette valeur maximale *(on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible)*.

3. Evénements indépendants : *(+1 exercice pour les enseignants)*

Remarque : Conforme au programme de 2012 mais plus orienté vers les anciennes sessions

Exercice 3732

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches. On en prélève n successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les deux évènements suivants :

- A : "*On obtient des boules des deux couleurs*" ;
- B : "*On obtient au plus une blanche*".

1. a. Calculer la probabilité de l'évènement : "*Toutes les boules tirées sont de même couleur*".

   b. Calculer la probabilité de l'évènement : "*On obtient exactement une boule blanche*".

   c. En déduire que les probabilités $p(A\cap B)$, $p(A)$, $p(B)$ sont :
   $$p(A\cap B)=\frac{n}{2^n}\quad;\quad p(A)=1-\frac{1}{2^{n-1}}\quad;\quad p(B)=\frac{n+1}{2^n}$$

2. Montrer que $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$ si, et seulement si : $2^{n-1}=n+1$

3. Soit (u_n) la suite définie par :
   $u_n=2^{n-1}-(n+1)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$.

   Calculer u_2, u_3, u_4.
   Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

4. En déduire la valeur de l'entier n tel que les évènements A et B soient indépendants.

4. Probabilité conditionnelles et loi binomiale : *(+2 exercices pour les enseignants)*

Remarque : Conforme au programme de 2012 mais plus orienté vers les anciennes sessions

Exercice 3834

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune :

- La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.
- La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.

Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.

La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1€ et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Soient E et F les évènements :
   - E : "*à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges*" ;
   - F : "*à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge*".

   Montrer que : $p(E)=0{,}02$; $p(F)=0{,}17$.

3. Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 € ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 € ; sinon il ne reçoit rien.

   $\mathcal{X}$ désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur *(rappel le joueur mise 1€)*.

   a. Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.

   b. Calculer l'espérance mathématique de $\mathcal{X}$ et en donner une interprétation.

4. Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes *(n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2)*

   a. Démontrer que la probabilité p_n qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que : $p_n=1-(0{,}9)^n$.

   b. Justifier que la suite de terme général p_n est convergente et préciser sa limite.

   c. Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n>0{,}9$?

Exercice 4142

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir : sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.

On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note :

- M l'évènement : "*l'animal est porteur de la maladie*" ;
- T l'évènement : "*le test est positif*".

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.

2. Un animal est choisi au hasard.

   a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif?

b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.

3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie?

4. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par $\mathcal{X}$?

b. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif?

5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abatage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratui.

D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donné par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,9405	0,0580	0,0015

a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.

b. Un éleveur possède un troupeu de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager?

Exercice 3130

La scène se passe en haut d'une falaise au bord de la mer. Pour trouver une plage et aller se baigner, les touristes ne peuvent choisir qu'entre deux plages, l'une à l'Est et l'autre à l'Ouest.

A- Un touriste se retrouve deux jours consécutifs en haut de la falaise. Le premier jour, il choisit au hasard l'une des deux directions. Le second jour, on admet que la probabilité qu'il choisisse une direction opposée à celle prise la veille vaut 0,8.

Pour $i=1$ ou $i=2$, on note E_i l'évènement : "*Le touriste se dirige vers l'Est le i-ième jour*" et O_i l'évènement : "*Le touriste se dirige vers l'Ouest le i-ième jour*".

1. Dresser un arbre de probabilités décrivant la situation.

2. Déterminer les probabilités suivantes :
$p(E_1)$; $p_{E_1}(O_2)$; $p(E_1 \cap E_2)$

3. Calculer la probabilité que ce touriste se rende sur la même plage les deux jours consécutifs.

B- On suppose maintenant que n touristes $(n \geqslant 3)$ se retrouvent un jour en haut de la falaise. Ces n touristes veulent tous se baigner et chacun d'eux choisit au hasard et indépendamment des autres l'une des deux directions.
On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire donnant le nombre de ces touristes qui choisissent la plage à l'Est.

1. Déterminer la probabilité que k touristes $(0 \leqslant k \leqslant n)$ partent en direction de l'Est.

2. On suppose ici que les deux plages considérées sont désertes au départ. On dit qu'un touriste est heureux s'il se retrouve seul sur une plage.

a. Peut-il y avoir deux touristes heureux?

b. Démontrer que la probabilité *(notée p)* qu'il y ait un touriste heureux parmi ces n touristes vaut : $p = \dfrac{n}{2^{n-1}}$

c. **Application numérique :**
Lorsque le groupe comprend 10 personnes, exprimer la probabilité, arrondie au centième, qu'il y ait un touriste heureux parmi les 10.

5. *Schémas de Bernoulli et loi binomiale :*

(+1 exercice pour les enseignants)

Remarque : Conforme au programme de 2012 mais plus orienté vers les anciennes sessions

Exercice 4193

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique.

Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un mois soit au total quarante trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.

Le prix de chaque trajet est de dix euros, en cas de fraude l'amende est de cent euros.

Claude fraude systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude. Soit $\mathcal{X}_i$ la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si Claude est contrôlé au i-ième trajet et la valeur 0 sinon. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire définie par :
$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 + \mathcal{X}_3 + \cdots + \mathcal{X}_{40}$

1. Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.

2. Dans cette partie, on suppose que $p = \dfrac{1}{20}$.

a. Calculer l'espérance mathématiques de $\mathcal{X}$.

b. Calculer les probabilités :
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}=2)$

c. Calculer à 10^{-4} près la probabilité pour que Claude soit contrôlé au plus deux fois.

3. Soit $\mathcal{Z}$ la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé par le fraudeur. Justifier l'égalité :
$\mathcal{Z} = 400 - 100 \cdot \mathcal{X}$,
puis calculer l'espérance de $\mathcal{Z}$ pour $p = \dfrac{1}{5}$.

4. On désire maintenant déterminer p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit

supérieure à $99\,\%$.

a. Démontrer que :
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 2) = (1-p)^{38}\cdot\big(741\cdot p^2+38\cdot p+1\big)$$

b. Soit f la fonction définie sur $\big[0\,;1\big]$ par :
$$f(x) = (1-x)^{38}\cdot\big(741\cdot x^2+38\cdot x+1\big)$$
Montrer que f est strictement décroissante sur $[0\,;1]$ et qu'il existe un unique réel x_0 appartenant à l'intervalle $\big[0\,;1\big]$ tel que : $f(x_0)=0{,}01$

Déterminer l'entier naturel n tel que :
$$\frac{n}{100} < x_0 < \frac{n+1}{100}$$

c. En déduire la valeur minimale qu'il faut attribuer à p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure ou égale à $99\,\%$. *(On exprimera p en fonction de x_0)*

