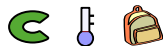


Terminale Option Experte/Opérations sur les matrices

1. Addition :

Exercice 6809



Définition :

Soit m, n deux entiers naturels non-nuls ($m, n \in \mathbb{N}^*$). On considère deux matrices A et B de dimensions $m \times n$ et on note respectivement a_{ij} et b_{ij} leurs coefficients.

La **somme des matrices A et B** est la matrice de dimensions $m \times n$ notée $A+B$ dont les coefficients c_{ij} , sont définis par :

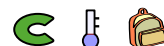
$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i \in [1; m] \quad ; \quad \forall j \in [1; n]$$

Effectuer les additions de matrices suivantes :

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 6155



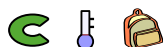
Effectuer les opérations suivantes :

a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. Multiplication par un réel et addition :

Exercice 6154



Définition

Soit λ un nombre réel ($\lambda \in \mathbb{R}$) et A une matrice de dimension $m \times n$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$) dont les coefficients sont notés a_{ij}

On appelle **produit de la matrice A par le scalaire λ** , la matrice de dimensions $m \times n$ notée $\lambda \cdot A$ et dont les coefficients b_{ij} sont définis par :

$$b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} \quad \forall i \in [1; m] \quad ; \quad \forall j \in [1; n]$$

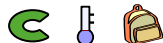
Effectuer les opérations suivantes :

a. $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ b. $4 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Multiplication :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 6165



Définition :

Soit m, n, p trois entiers naturels non-nuls ($m, n, p \in \mathbb{N}^*$).

On considère les deux matrices A et B de dimensions respectives $m \times n$ et $n \times p$. Le **produit de la matrice A par la matrice B** est une matrice de dimensions $m \times p$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^n a_{ik} \times b_{kj} \quad \forall i \in [1; m] \quad ; \quad \forall j \in [1; p]$$

Exemple :



r641-0

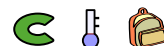
Vérifier les égalités suivantes :

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 13 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice 5355



Effectuer les produits suivants de matrices :

a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b.
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3107



Effectuer les produits de matrices suivantes :

a.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
 b.
$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5072



Effectuer les produits de matrices suivantes :

a.
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
 b.
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6197



Une entreprise nécessite chaque année des fournitures de bureau pour faire fonctionner ses départements "administratifs" et "productions". Le tableau ci-dessous recense ses besoins pour une année en milliers d'unités :

| | Rames de feuilles (M_1) | Stylo (M_2) | Tubes de colle (M_3) |
|--------------------------|-----------------------------|-----------------|--------------------------|
| Administration (D_1) | 3 | 4 | 1 |
| Production (D_2) | 1 | 2 | 3 |

Un appel d'offres est lancé auquel répondent deux entreprises. Le tableau ci-dessous représente le prix unitaire en euros de chacun des fournitures nécessaire à cette entreprise :

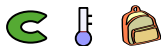
| | Rames de feuilles (M_1) | Stylo (M_2) | Tubes de colle (M_3) |
|-----------------------------------|-----------------------------|-----------------|--------------------------|
| Fournisseur PasTropCher (F_1) | 2 | 3 | 1 |
| Fournisseur BonPrix (F_2) | 3 | 1 | 2 |

- Ecrire la matrice $A = (a_{ij})$ où le coefficient a_{ij} est la quantité du matériel M_j nécessaire au département D_i .
 - Ecrire la matrice $B = (b_{ij})$ où le coefficient b_{ij} est le prix proposé par le fournisseur F_j pour le matériel M_i .
- Effectuer le produit matriciel suivant: $A \cdot B$.
- Afin de réaliser des économies, quel fournisseur l'entreprise doit choisir.
 - Pour ce fournisseur, donner le montant de l'achat des fournitures de bureau.

4. Multiplication et matrice identité :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 6166



Définition :

On appelle **matrice identité d'ordre n** ($n \in \mathbb{N}^*$) la matrice carré d'ordre n dont les coefficients ont pour valeur 1 sur la diagonale principale et 0 ailleurs. On la note I_n .

Pour $I_n = (a_{ij})$, on a :
$$\begin{cases} a_{ii} = 1 & \forall i \in \llbracket 1;n \rrbracket \\ a_{ij} = 0 & \forall (i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2 \text{ et } i \neq j \end{cases}$$

- Effectuer les produits matriciels suivants :

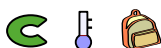
a.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 b.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

- Que peut-t-on donner comme caractéristique à une matrice ne comportant que des 1 sur sa diagonale principale et des zéros ailleurs?

5. Commutativité de la multiplication :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 6167



Définition :

Soit A et B deux matrices carrés d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$), on dit que le produit des matrices A et B est **commutatif** si : $A \cdot B = B \cdot A$

- Effectuer les deux produits matriciels suivants :

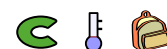
a.
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
 b.
$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Effectuer les deux produits matriciels suivants :

a.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
 b.
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Peut-on obtenir une règle sur les produits $A \cdot B$ et $B \cdot A$ de deux matrices?

Exercice 5076



On considère les deux matrices suivantes :

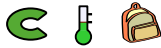
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Démontrer que : $A \cdot B = 0$
- Déterminer la matrice produit $B \cdot A$.

6. Multiplication et résolutions de systèmes d'équations linéaires :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 5073



Soit a et b deux nombres réels vérifiant l'égalité ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs des réels a et b .

Exercice 5074



Soit a , b et c sont trois nombres réels réalisant l'égalité suivante :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs des réels a , b et c

Exercice 5075



Soit a , b et c solutions de l'équation :

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'ensemble des triplets $(a; b; c)$ solutions de cette équation.

7. Distributivité :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 5078



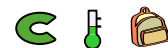
On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Calculer : $A+B$.
- Calculer : $(A+B)^2$
 - Calculer : $A^2+2 \cdot A \cdot B+B^2$
- En tenant compte des propriétés algébriques du produit matriciel, donner le développement de l'expression

$$(A+B)^2.$$

Exercice 5098



Soit A une matrice carrée d'ordre n et la matrice unité I_n d'ordre n .

- Développer les expressions suivantes :

$$\text{a. } (2 \cdot A + I_n) \cdot (I_n - A) \quad \text{b. } (A + 2 \cdot I_n)^2$$

- Evaluer chacune de ces deux expressions dans le cas où :

$$n=2 ; A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

8. Puissances n -ième de matrices :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 8625



On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

- Déterminer la matrice A^2 .
- En déduire l'expression de A^{101}

Exercice 8624



On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

- Déterminer les matrices A^2 et A^3 .

- En déduire l'expression de A^{50} .

Exercice 5100



On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

- Etablir l'égalité : $A^3 = -8 \cdot I_3$

- En déduire l'expression de A^{11}

9. Puissances n -ième de matrices, cyclicité et congruence :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 5129   

On considère la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

Déterminer l'expression de la puissance n -ième de la matrice A .

Exercice 5126   

On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'expression de A^n pour tout entier naturel n non-nul.

Exercice 8621   

On considère les matrices A et B définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Déterminer les carrés des matrices A et B .
- Pour tout entier naturel n , déterminer une expression de A^n et une expression de B^n .

Exercice 8622   

On considère la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

Déterminer l'expression de la puissance n -ième de la matrice A .

Exercice 8623   

On considère la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

Déterminer l'expression de la puissance n -ième de la matrice A .

10. Puissances n -ième de matrices et raisonnement par récurrence : (+4 exercices pour les enseignants)

Exercice 5082   

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Etablir, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 8626   

Montrer que pour tout entier naturel non-nul n , on a :

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 7364    

On considère la matrice B carré d'ordre 3 définie par :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Etablir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la relation :

$$B^n = B^2$$

Exercice 5083   

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Etablir, que pour tout entier naturel n : $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 6100    

Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 3 & 4 - 2^{n+2} \\ 3 \times 2^n - 3 & 4 - 3 \times 2^n \end{pmatrix}$$

11. Matrice inverse : (+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 5094   

Soit n un entier naturel non-nul et A et B deux matrices carrées d'ordre n .

On dit que la matrice B est la **matrice inverse de la matrice A** si : $A \cdot B = I_n$; $B \cdot A = I_n$

On considère les deux matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Déterminer les matrices des produits $A \cdot B$ et $B \cdot A$.
- Que peut-on dire des matrices A et B ?

Exercice 5095

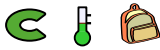
On considère les deux matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

- Déterminer les produits $A \cdot B$ et $B \cdot A$.
- Que peut-on dire des matrices A et B ?

12. Matrice inverse et expressions algébriques :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 8632**Exercice 5116**

On considère la matrice carrée A d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Déterminer la matrice $A^2 + A$.
 - Exprimer la matrice inverse de A en fonction de A et de I_3 .

- En déduire la matrice inverse de la matrice A .

Exercice 5117

On considère la matrice carrée A d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Déterminer la matrice $A^2 - 3 \times A$.
 - Exprimer la matrice inverse de A en fonction de A et de I_3 .
- En déduire la matrice inverse de la matrice A .

13. Matrice inverses de matrices d'ordre 2 :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 8634**Définition :**

On considère A la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

On appelle **déterminant de la matrice A** , noté $\det(A)$, le nombre : $\det(A) = a \cdot d - b \cdot c$

Déterminer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

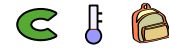
Exercice 5097**Proposition :**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. La matrice A est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$.

On a alors : $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

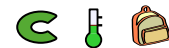
Déterminer les inverses des matrices suivantes :

$$\text{a. } \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b. } \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{c. } \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 6828

Etablir que chacune des matrices ci-dessous sont inversibles et déterminer l'expression de leurs matrices inverses :

$$\text{a. } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b. } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{c. } \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5112

- Soit n un entier naturel non-nul. On considère A et B deux matrices carrées d'ordre n inversible et λ un nombre réel non-nul.
 - Montrer que le produit $A \cdot B$ est une matrice inversible dont on précisera l'inverse.
 - Montrer que la matrice $\lambda \cdot A$ est une matrice inversible dont on précisera l'inverse.
- On considère les deux matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Montrer que la relation suivante est fautive :

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$$