Terminale Option Experte/Nombres complexes et trigonométrie

1. Rappels :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 1

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$

Déterminer les valeurs exactes des expressions ci-dessous :

a. $\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)$ b. $\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$ c. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Exercice 2

Formule des angles associés

- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(\pi+x) = -\cos x$
- $\sin(\pi+x) = -\sin x$
- $\cos(\pi-x) = -\cos x$
- $\sin(\pi-x) = \sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$

Soit α un nombre réel. Simplifier les écritures suivantes :

a. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ b. $\sin(\alpha+3\cdot\pi)$

c. $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$ d. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

Exercice 3

A l'aide de la relation : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ où $x \neq \frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$
simplifier les expressions suivantes :

a. $\tan(x+\pi)$ b. $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

2. Formules d'addition :

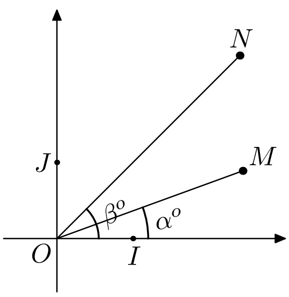
(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 4

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on considère les points M et N tel que :

$$\|\overrightarrow{OM}\| = a \quad ; \quad \|\overrightarrow{ON}\| = b$$

$$\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right) = \alpha \quad ; \quad \left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{ON}\right) = \beta$$



1. a. Déterminer les coordonnées des points M et N.
   b. Donner une expression du produit scalaire $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$
2. a. Donner la mesure de l'angle orienté : $\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{ON}\right)$
   b. Donner une autre expression de $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$.
3. En déduire l'égalité :
   $\cos(\beta-\alpha) = \cos\beta\cdot\cos\alpha + \sin\beta\cdot\sin\alpha$

Exercice 5

Formule d'addition et de différence

- $\cos(a+b) = \cos a\cdot\cos b - \sin a\cdot\sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a\cdot\cos b + \sin a\cdot\sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a\cdot\cos b + \cos a\cdot\sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a\cdot\cos b - \cos a\cdot\sin b$

Déterminer une simplification des expressions suivantes :

1. $\cos 2x\cdot\cos x - \sin 2x\cdot\sin x$
2. $\sin 3x\cdot\cos 2x - \sin 2x\cdot\cos 3x$

Exercice 6

Montrer la relation suivante :

$$\sin(a+b)\cdot\cos(a-b) = \sin a\cdot\cos a + \cos b\cdot\sin b$$

Exercice 7

1. Simplifier l'expression suivante :
   $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$
2. Etablir l'égalité suivante :
   $$\frac{\sin 5x}{\sin 2x} + \frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{\left(\sin 3x\right)^2}{\sin(2x)\cdot\sin(x)}$$
3. Résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos(2x)+\frac{1}{2}\cdot\sin(2x)=\cos\frac{\pi}{7}$$

3. Formules de duplication :

Exercice 8

Formule de duplication
- $\cos(2a)=\big(\cos a\big)^2-\big(\sin a\big)^2$
- $\cos(2a)=2\cdot\big(\cos a\big)^2-1$
- $\cos(2a)=1-2\cdot\big(\sin a\big)^2$
- $\sin(2a)=2\cdot\sin a\cdot\cos a$

1. Etablir la relation suivante : $\Big(\cos\frac{\pi}{8}\Big)^2=\frac{1}{4}\cdot\big(\sqrt{2}+2\big)$
2. En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{8}$.
3. Etablir la relation : $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

4. Opération sur les écritures trigonométrique :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 9

On considère les deux nombres complexes :
$z_1=1+\mathrm{i}\quad;\quad z_2=3+\sqrt{3}\cdot\mathrm{i}$

1. Déterminer l'écriture trigonométrique des nombres complexes z_1 et z_2.
2. Effectuer le produit $z_1\cdot z_2$. En déduire l'écriture trigonométrique de ce produit.
3. a. Exprimer le module du produit $z_1\cdot z_2$ en fonction des modules de z_1 et z_2.
   b. Exprimer l'argument du produit $z_1\cdot z_2$ en fonction des arguments de z_1 et z_2.

Exercice 10

On considère les deux nombres complexes :
$z_1=2-2\cdot\mathrm{i}\quad;\quad z_2=-1+\sqrt{3}\cdot\mathrm{i}$

1. Déterminer l'écriture trigonométrique des nombres complexes z_1 et z_2.
2. Donner l'écriture trigonométrique du quotient $\frac{z_1}{z_2}$.
3. a. Exprimer le module du produit $\frac{z_1}{z_2}$ en fonction des modules de z_1 et z_2.
   b. Exprimer l'argument du produit $\frac{z_1}{z_2}$ en fonction des arguments de z_1 et z_2.

Exercice 11

Rechercher tous les couples $(z_1\,;z_2)$ de nombres complexes satisfaisant aux conditions :

$$\begin{cases} z_1\cdot z_2=\frac{1}{2}\\ z_1+2\cdot z_2=\sqrt{3}\end{cases}$$

Déterminer l'écriture trigonométrique de chacun des nombres ainsi obtenue.

5. Ecritures exponentielles :

Exercice 12

Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :

a. $z_1=3\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\pi}$ b. $z_2=\sqrt{2}\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{4}}$ c. $z_3=2\sqrt{3}\cdot e^{-\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{6}}$

Exercice 13

Déterminer l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants :

a. $z_1=5$ b. $z_2=-3$ c. $z_3=-3\cdot\mathrm{i}$
d. $z_4=-3+3\cdot\mathrm{i}$ e. $z_5=-2\sqrt{3}-2\cdot\mathrm{i}$ f. $z_6=\sqrt{3}-3\cdot\mathrm{i}$

Exercice 14

1. Soit z un nombre complexe admettant la forme exponentielle :
   $z=r\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\theta}\quad$ où $r\in\mathbb{R}_+^*,\quad\theta\in\mathbb{R}$
   Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants : a. $\overline{z}$ b. $-z$
2. a. Justifier l'égalité suivante : $2\cdot e^{-\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{3}}=-2\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi}{3}}$
   b. En déduire l'écriture exponentielle de :
   $2\cdot e^{-\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{3}}+3\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi}{3}}$

6. Produit, quotient d'écriture exponentielle :

(+4 exercices pour les enseignants)

Exercice 15

1. Donner l'écriture exponentielle des deux nombres complexes suivants : $z_1=1-\mathrm{i}$; $z_2=1+\mathrm{i}$

2. En déduire l'écriture exponentielle du nombre complexe :
$$z=\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$$

Exercice 16

On considère les deux nombres complexes :
$$z_1=1+\mathrm{i} \quad ; \quad z_2=\sqrt{3}+\mathrm{i}$$

1. Déterminer les écritures exponentielles des nombres z_1 et z_2.

2. On note z_3 et z_4 les deux nombres complexes définies par : $z_3=z_1\cdot z_2$; $z_4=\dfrac{z_1}{z_2}$

   Déterminer les écritures exponentielles des nombres z_3 et z_4.

Exercice 17

On considère les deux nombres complexes donnés ci-dessous :
$$z_1=\sqrt{3}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad z_2=\sqrt{6}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{6}}$$

Déterminer une expression simplifiée des calculs suivants :

a. $z_1\cdot z_2$ b. $\dfrac{z_1}{z_2}$ c. z_1+z_2

Exercice 18

On considère dans $\mathbb{C}$ les nombres complexes z_1 et z_2 de module 1 et d'arguments respectifs α et β. Montrer que :
$\dfrac{\left(z_1+z_2\right)^2}{z_1\cdot z_2}$ est un réel positif ou nul.

7. Ecriture exponentielle et mesure principale de l'argument :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 19

On considère les deux nombres complexes suivants donnés sous leur forme exponentielle :
$$z_1=2\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi}{3}} \quad ; \quad z_2=3\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{3\pi}{4}}$$

Donner l'écriture exponentielle des expressions suivantes :

a. $z_1\cdot z_2$ b. $\left(z_1\right)^2\cdot z_2$ c. $\dfrac{z_2}{\left(z_1\right)^3}$

Indication : *On donnera les mesures principales des arguments*

Exercice 20

1. a. Soit z_1 le nombre complexe admettant pour écriture algébrique : $z_1=-2\cdot\sqrt{3}+2\cdot\mathrm{i}$

   Déterminer l'écrituer exponentielle de ce nombre.

   b. Soit z_2 le nombre complexe vérifiant :
   $$|z_2|=\sqrt{2} \quad ; \quad \arg(z_2)=\frac{3}{4}\cdot\pi$$

   Déterminer l'écriture algébrique du complexe z_2

2. Déterminer, à votre convenance, soit l'écriture algébrique, soit l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants :

   a. $z_1\cdot z_2$ b. z_1+z_2

Indication : *On donnera les mesures principales des arguments*

Exercice 21

Le plan complexe est rapporté à un repère $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct. On considère l'application z de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f:z\longmapsto z^2$.

On considère le complexe : $a=\sqrt{2}-\mathrm{i}\cdot\sqrt{2}$

1. Exprimer a sous écriture exponentielle.

2. En déduire les nombres complexes antécédents du nombre a par f.

8. Puissance d'écriture exponentielle :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 22

On considère le nombre complexe z défini par : $z=1+\mathrm{i}$

Etablir que le nombre z^{100} est un nombre réel.

Exercice 23

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

1. Soit $z=3+\mathrm{i}\cdot\sqrt{3}$.

   Proposition 1 : Pour tout entier naturel n non nul, $z^{3\cdot n}$ est imaginaire pur.

2. Soit z un nombre complexe non nul.

   Proposition 2 : Si $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de z alors :
   $$\left|\mathrm{i}+z\right|=1+\left|z\right|$$

3. Soit z un nombre complexe non nul.

   Proposition 3 : Si le module de z est égal à 1 alors $z^2+\dfrac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

9. Formule d'Euler :

Exercice 24

On **linéarise** une expression de la forme $\cos^p(x)\cdot\sin^q(x)$, où $p,q\in\mathbb{N}$ lorsqu'on la transforme en une combinaison linéaire d'expression de la forme $\cos(n\cdot x)$ et $\sin(m\cdot x)$, où $n,m\in\mathbb{N}$

Etablir la linéarisation suivante :

$$\cos(x)^2\cdot\sin(x)^2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cdot\cos(4x)$$

Exercice 25

On souhaite linéariser l'expression $\cos^3(x)$:

1. A l'aide de la formule d'Euler et la formule du binôme, établir :
$$\cos^3(x) = \frac{e^{-3i\cdot x}+3\cdot e^{-i\cdot x}+3\cdot e^{i\cdot x}+e^{3i\cdot x}}{8}$$
2. En déduire l'identité : $\cos^3(x) = \dfrac{\cos(3x)+3\cdot\cos(x)}{4}$

Exercice 26

Pour tout nombre réel x et pour tout entier k non-nul, établir la relation :

$$\big[\cos(x)\big]^{2k} = \frac{1}{4^k}\cdot\binom{2k}{k}+\frac{1}{2^{2k-1}}\cdot\sum_{\ell=0}^{k-1}\binom{2k}{\ell}\cdot\cos\big[(2k-2\ell)x\big]$$

10. Formule de Moivre :

Exercice 27

Pour tout entier naturel n et tout nombre réel θ, on a :
$$\big(\cos\theta+i\cdot\sin\theta\big)^n = \cos\big(n\cdot\theta\big)+i\cdot\sin\big(n\cdot\theta\big)$$

1. A l'aide de la formule du binôme, établir l'identité :
$$\big(\cos\theta+i\cdot\sin\theta\big)^3 = \big(4\cdot\cos(\theta)^3-3\cdot\cos\theta\big)+i\big(3\cdot\sin\theta-4\cdot\sin(\theta)^3\big)$$
2. A l'aide de la formule de Moivre, établir les identités :
$$\cos(3\theta)=4\cdot\cos(\theta)^3-3\cdot\cos\theta \quad ; \quad \sin(3\theta)=3\cdot\sin\theta-4\cdot\sin(\theta)^3$$

11. Cours :

Exercice 28

On rappelle les deux résultats suivants :

- Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :
$$\begin{cases} |z| = r \\ \arg z = \theta \quad \text{à } 2\pi \text{ près}\end{cases} \iff \begin{cases} z = r\big(\cos\theta+i\sin\theta\big) \\ r > 0\end{cases}$$
- Pour tous nombres réels a et b :
$$\begin{cases} \cos\big(a+b\big) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \\ \sin\big(a+b\big) = \sin a\cos b + \sin b\cos a\end{cases}$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.
Démontrer les relations :

$$|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$$
$$\arg(z_1 z_2) = arg(z_1)+arg(z_2) \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

Exercice 29

On rappelle que pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul, d'affixe z, on a :

$$|z| = \|\overrightarrow{w}\| \quad ; \quad \arg(z) = \big(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{w}\big) \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

Préquis : on sait que si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors :
$$\arg(z\cdot z') = \arg(z)+arg(z')$$

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Démontrer que :
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z)-\arg(z')$$

Exercice 30

On considère deux nombres complexes z et z' non-nuls de modules respectifs r et r' et d'arguments respectifs θ et θ'.

1. Donner l'écriture trigonométrique des nombres complexes z et z'.
2. Montrer que le nombre complexe $z\cdot z'$ est un nombre complexe de module $(r\cdot r')$ et d'argument $(\theta+\theta')$.
3. Montrer que le nombre complexe $\dfrac{z}{z'}$ est un nombre complexe de module $\dfrac{r}{r'}$ et d'argument $(\theta-\theta')$.

13. Exercices non-classés :

Exercice 31

Soit les nombres complexes :
$$z_1 = \sqrt{2}+i\cdot\sqrt{6} \quad ; \quad z_2 = 2+2\cdot i \quad ; \quad Z = \frac{z_1}{z_2}$$

1. Ecrire Z sous forme algébrique.
2. Donner les modules et les arguments de z_1, z_2 et Z.
3. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 32

On considère l'équation (E) suivante : $z^2+2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cdot z+1=0$

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse en justifiant votre affirmation :

"*L'équation (E) a deux solutions complexes de modules égaux à 1.*"