Terminale Option Experte/Nombres complexes et trigonométrie

1. Rappels :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 2304

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$

Déterminer les valeurs exactes des expressions ci-dessous :

a. $\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)$ b. $\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$ c. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Exercice 7605

Formule des angles associés

- $\cos(-x) = \cos x$
- $\cos(\pi+x) = -\cos x$
- $\cos(\pi-x) = -\cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\sin(\pi+x) = -\sin x$
- $\sin(\pi-x) = \sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$

Soit α un nombre réel. Simplifier les écritures suivantes :

a. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ b. $\sin\left(\alpha+3\cdot\pi\right)$

c. $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$ d. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

Exercice 2575

A l'aide de la relation : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ où $x \neq \frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$

simplifier les expressions suivantes :

a. $\tan\left(x+\pi\right)$ b. $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

2. Formules d'addition :

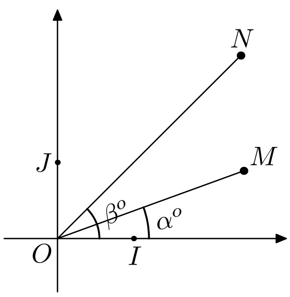
(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 6808

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on considère les points M et N tel que :

$\|\overrightarrow{OM}\| = a$; $\|\overrightarrow{ON}\| = b$

$\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right) = \alpha$; $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{ON}\right) = \beta$



1. a. Déterminer les coordonnées des points M et N.

   b. Donner une expression du produit scalaire $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$

2. a. Donner la mesure de l'angle orienté : $\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{ON}\right)$

   b. Donner une autre expression de $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$.

3. En déduire l'égalité :
   $\cos\left(\beta-\alpha\right) = \cos\beta\cdot\cos\alpha + \sin\beta\cdot\sin\alpha$

Exercice 2616

Formule d'addition et de différence

- $\cos(a+b) = \cos a\cdot\cos b - \sin a\cdot\sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a\cdot\cos b + \sin a\cdot\sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a\cdot\cos b + \cos a\cdot\sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a\cdot\cos b - \cos a\cdot\sin b$

Déterminer une simplification des expressions suivantes :

1. $\cos 2x\cdot\cos x - \sin 2x\cdot\sin x$
2. $\sin 3x\cdot\cos 2x - \sin 2x\cdot\cos 3x$

Exercice 2615

Montrer la relation suivante :

$$\sin(a+b)\cdot\cos(a-b) = \sin a\cdot\cos a + \cos b\cdot\sin b$$

Exercice 3089

1. Simplifier l'expression suivante :
   $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

2. Etablir l'égalité suivante :
   $$\frac{\sin 5x}{\sin 2x} + \frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{\left(\sin 3x\right)^2}{\sin(2x)\cdot\sin(x)}$$

3. Résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos(2x)+\frac{1}{2}\cdot\sin(2x)=\cos\frac{\pi}{7}$$

3. Formules de duplication :

Exercice 2613

Formule de duplication

- $\cos(2a)=\big(\cos a\big)^2-\big(\sin a\big)^2$
- $\cos(2a)=2\cdot\big(\cos a\big)^2-1$
- $\cos(2a)=1-2\cdot\big(\sin a\big)^2$
- $\sin(2a)=2\cdot\sin a\cdot\cos a$

1. Etablir la relation suivante : $\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{2}+2\right)$
2. En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{8}$.
3. Etablir la relation : $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

4. Opération sur les écritures trigonométrique :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 8578

On considère les deux nombres complexes :

$z_1=1+\mathrm{i}\quad;\quad z_2=3+\sqrt{3}\cdot\mathrm{i}$

1. Déterminer l'écriture trigonométrique des nombres complexes z_1 et z_2.
2. Effectuer le produit $z_1\cdot z_2$. En déduire l'écriture trigonométrique de ce produit.
3. (a.) Exprimer le module du produit $z_1\cdot z_2$ en fonction des modules de z_1 et z_2.
   (b.) Exprimer l'argument du produit $z_1\cdot z_2$ en fonction des arguments de z_1 et z_2.

Exercice 8579

On considère les deux nombres complexes :

$z_1=2-2\cdot\mathrm{i}\quad;\quad z_2=-1+\sqrt{3}\cdot\mathrm{i}$

1. Déterminer l'écriture trigonométrique des nombres complexes z_1 et z_2.
2. Donner l'écriture trigonométrique du quotient $\frac{z_1}{z_2}$.
3. (a.) Exprimer le module du produit $\frac{z_1}{z_2}$ en fonction des modules de z_1 et z_2.
   (b.) Exprimer l'argument du produit $\frac{z_1}{z_2}$ en fonction des arguments de z_1 et z_2.

Exercice 3828

Rechercher tous les couples $(z_1\,;z_2)$ de nombres complexes satisfaisant aux conditions :

$$\begin{cases} z_1\cdot z_2=\frac{1}{2}\\ z_1+2\cdot z_2=\sqrt{3}\end{cases}$$

Déterminer l'écriture trigonométrique de chacun des nombres ainsi obtenue.

5. Ecritures exponentielles :

Exercice 5365

Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :

a. $z_1=3\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\pi}$ b. $z_2=\sqrt{2}\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{4}}$ c. $z_3=2\sqrt{3}\cdot e^{-\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{6}}$

Exercice 3848

Déterminer l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants :

a. $z_1=5$ b. $z_2=-3$ c. $z_3=-3\cdot\mathrm{i}$

d. $z_4=-3+3\cdot\mathrm{i}$ e. $z_5=-2\sqrt{3}-2\cdot\mathrm{i}$ f. $z_6=\sqrt{3}-3\cdot\mathrm{i}$

Exercice 3831

1. Soit z un nombre complexe admettant la forme exponentielle :
   $z=r\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\theta}$ où $r\in\mathbb{R}_+^*$, $\theta\in\mathbb{R}$
   Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants : (a.) $\overline{z}$ (b.) $-z$
2. (a.) Justifier l'égalité suivante : $2\cdot e^{-\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{3}}=-2\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi}{3}}$
   (b.) En déduire l'écriture exponentielle de :
   $2\cdot e^{-\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{3}}+3\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi}{3}}$

6. Produit, quotient d'écriture exponentielle : *(+4 exercices pour les enseignants)*

Exercice 3798

1. Donner l'écriture exponentielle des deux nombres complexes suivants : $z_1 = 1 - \mathrm{i}$; $z_2 = 1 + \mathrm{i}$

2. En déduire l'écriture exponentielle du nombre complexe :
$$z = \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$$

Exercice 6104

On considère les deux nombres complexes :
$$z_1 = 1 + \mathrm{i} \quad ; \quad z_2 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$$

1. Déterminer les écritures exponentielles des nombres z_1 et z_2.

2. On note z_3 et z_4 les deux nombres complexes définies par : $z_3 = z_1 \cdot z_2$; $z_4 = \dfrac{z_1}{z_2}$

   Déterminer les écritures exponentielles des nombres z_3 et z_4.

Exercice 5366

On considère les deux nombres complexes donnés ci-dessous :
$$z_1 = \sqrt{3}\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad z_2 = \sqrt{6}\cdot e^{-\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{6}}$$

Déterminer une expression simplifiée des calculs suivants :

a. $z_1 \cdot z_2$ b. $\dfrac{z_1}{z_2}$ c. $z_1 + z_2$

Exercice 3827

On considère dans $\mathbb{C}$ les nombres complexes z_1 et z_2 de module 1 et d'arguments respectifs α et β. Montrer que :
$$\frac{\left(z_1 + z_2\right)^2}{z_1 \cdot z_2} \text{ est un réel positif ou nul.}$$

7. Ecriture exponentielle et mesure principale de l'argument : *(+1 exercice pour les enseignants)*

Exercice 5381

On considère les deux nombres complexes suivants donnés sous leur forme exponentielle :
$$z_1 = 2\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi}{3}} \quad ; \quad z_2 = 3\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\frac{3\pi}{4}}$$

Donner l'écriture exponentielle des expressions suivantes :

a. $z_1 \cdot z_2$ b. $\left(z_1\right)^2 \cdot z_2$ c. $\dfrac{z_2}{\left(z_1\right)^3}$

Indication : *On donnera les mesures principales des arguments*

Exercice 3829

1. a. Soit z_1 le nombre complexe admettant pour écriture algébrique : $z_1 = -2\cdot\sqrt{3} + 2\cdot\mathrm{i}$

   Déterminer l'écrituer exponentielle de ce nombre.

   b. Soit z_2 le nombre complexe vérifiant :
   $$|z_2| = \sqrt{2} \quad ; \quad \arg(z_2) = \frac{3}{4}\cdot\pi$$

   Déterminer l'écriture algébrique du complexe z_2

2. Déterminer, à votre convenance, soit l'écriture algébrique, soit l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants :

   a. $z_1 \cdot z_2$ b. $z_1 + z_2$

Indication : *On donnera les mesures principales des arguments*

Exercice 6081

Le plan complexe est rapporté à un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct. On considère l'application z de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f : z \longmapsto z^2$.

On considère le complexe : $a = \sqrt{2} - \mathrm{i}\cdot\sqrt{2}$

1. Exprimer a sous écriture exponentielle.

2. En déduire les nombres complexes antécédents du nombre a par f.

8. Puissance d'écriture exponentielle : *(+1 exercice pour les enseignants)*

Exercice 8583

On considère le nombre complexe z défini par : $z = 1 + \mathrm{i}$

Etablir que le nombre z^{100} est un nombre réel.

Exercice 4325

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

1. Soit $z = 3 + \mathrm{i}\cdot\sqrt{3}$.

   Proposition 1 : Pour tout entier naturel n non nul, $z^{3\cdot n}$ est imaginaire pur.

2. Soit z un nombre complexe non nul.

   Proposition 2 : Si $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de z alors :
   $$\left|\mathrm{i} + z\right| = 1 + |z|$$

3. Soit z un nombre complexe non nul.

   Proposition 3 : Si le module de z est égal à 1 alors $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

9. Formule d'Euler :

Exercice 8584

On **linéarise** une expression de la forme $\cos^p(x)\cdot\sin^q(x)$, où $p,q\in\mathbb{N}$ lorsqu'on la transforme en une combinaison linéaire d'expression de la forme $\cos(n\cdot x)$ et $\sin(m\cdot x)$, où $n,m\in\mathbb{N}$

Etablir la linéarisation suivante :

$$\cos(x)^2\cdot\sin(x)^2=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cdot\cos(4x)$$

Exercice 5947

On souhaite linéariser l'expression $\cos^3(x)$:

1. A l'aide de la formule d'Euler et la formule du binôme, établir :
$$\cos^3(x)=\frac{e^{-3i\cdot x}+3\cdot e^{-i\cdot x}+3\cdot e^{i\cdot x}+e^{3i\cdot x}}{8}$$

2. En déduire l'identité : $\cos^3(x)=\dfrac{\cos(3x)+3\cdot\cos(x)}{4}$

10. Formule de Moivre :

Exercice 8585

Pour tout entier naturel n et tout nombre réel θ, on a :
$$\big(\cos\theta+i\cdot\sin\theta\big)^n=\cos\big(n\cdot\theta\big)+i\cdot\sin\big(n\cdot\theta\big)$$

1. A l'aide de la formule du binôme, établir l'identité :
$$\big(\cos\theta+i\cdot\sin\theta\big)^3=\big(4\cdot\cos(\theta)^3-3\cdot\cos\theta\big)+i\big(3\cdot\sin\theta-4\cdot\sin(\theta)^3\big)$$

2. A l'aide de la formule de Moivre, établir les identités :
$$\cos(3\theta)=4\cdot\cos(\theta)^3-3\cdot\sin\theta\quad;\quad\sin(3\theta)=3\cdot\sin\theta-4\cdot\sin(\theta)^3$$

11. Cours :

Exercice 3299

On rappelle les deux résultats suivants :

- Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :
$$\left\{\begin{array}{rcl}|z|&=&r\\ \arg z&=&\theta\quad\text{à }2\pi\text{ près}\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}z=r\big(\cos\theta+i\sin\theta\big)\\ r>0\end{array}\right.$$
- Pour tous nombres réels a et b :
$$\left\{\begin{array}{rcl}\cos\big(a+b\big)&=&\cos a\cos b-\sin a\sin b\\ \sin\big(a+b\big)&=&\sin a\cos b+\sin b\cos a\end{array}\right.$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.
Démontrer les relations :

$$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$$
$$\arg(z_1z_2)=arg(z_1)+arg(z_2)\text{ à }2\pi\text{ près.}$$

Exercice 3301

On rappelle que pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul, d'affixe z, on a :

$$|z|=\|\overrightarrow{w}\|\quad;\quad\arg(z)=\big(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{w}\big)\text{ à }2\pi\text{ près.}$$

Prérequis : on sait que si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors :
$$\arg(z\cdot z')=\arg(z)+arg(z')$$
Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Démontrer que :
$$\arg\Big(\frac{z}{z'}\Big)=\arg(z)-\arg(z')$$

Exercice 5951

On considère deux nombres complexes z et z' non-nuls de modules respectifs r et r' et d'arguments respectifs θ et θ'.

1. Donner l'écriture trigonométrique des nombres complexes z et z'.

2. Montrer que le nombre complexe $z\cdot z'$ est un nombre complexe de module $(r\cdot r')$ et d'argument $(\theta+\theta')$.

3. Montrer que le nombre complexe $\dfrac{z}{z'}$ est un nombre complexe de module $\dfrac{r}{r'}$ et d'argument $(\theta-\theta')$.

255. Exercices non-classés :

Exercice 5280

Soit les nombres complexes :

$$z_1=\sqrt{2}+i\cdot\sqrt{6}\quad;\quad z_2=2+2\cdot i\quad;\quad Z=\frac{z_1}{z_2}$$

1. Ecrire Z sous forme algébrique.
2. Donner les modules et les arguments de z_1, z_2 et Z.
3. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 5281

On considère l'équation (E) suivante : $z^2+2\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\cdot z+1=0$

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse en justifiant votre affirmation :

“*L'équation* (E) *a deux solutions complexes de modules égaux à* 1.”

