Terminale Option Experte/Annales graphes

1. Graphe :
(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 7672

Un jardinier doit décorer un jardin privatif en répartissant 10 variétés de fleurs notées V_1 à V_{10} dans différents parterres. Certaines de ces variétés ne peuvent pas être plantées ensemble pour des raisons diverses *(tailles, couleurs, conditions climatiques,…)* et ces incompatibilités sont résumées dans le tableau ci-dessous *(une croix indique qu'il y a incompatibilité entre deux variétés)*.

Fleur	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}
V_1			×			×				×
V_2			×	×	×			×		
V_3	×	×		×		×				
V_4		×	×		×			×	×	
V_5		×		×			×	×		
V_6	×		×				×			
V_7					×	×				
V_8		×		×	×					
V_9				×						×
V_{10}	×								×	

1. Représenter par son graphe G la situation.
2. a. Trouver une sous-graphe complet d'ordre 4 et le dessiner.
   b. Que peut-on en déduire pour la coloration du graphe G?
   Quel est le nombre minimum de parterres que le jardinier doit décorer?
3. a. Classer les sommets de G par ordre de degré décroissant.
   b. En déduire un encadrement de C, nombre chromatique de G.
4. a. Procéder à la colariation du graphe G.
   b. Que peut-on en déduire pour le nombre C? Justifier avec soin.
   c. Proposer un ensemble de parterres avec une répartition adaptée des variétés de fleurs.

3. Graphe probabiliste :
(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 6399

Les services commerciaux d'une grande surface de produits alimentaires ont défini un profil de client qui a été appelé "*consommateur bio*".

Sur la base d'observations réalisées les années précédentes, il a été constaté que :

- 90 % des clients "*consommateur bio*" maintenaient cette pratique l'année suivante ;
- 15 % des clients n'ayant pas le profil de "*consommateur bio*" entraient dans la catégorie "*consommateur bio*" l'année suivante.

On suppose que cette évolution se poursuit d'une année à l'autre à partir de 2013, année au cours de laquelle il a été constaté que 20 % des clients ont le profil "*consommateur bio*".

Par un tirage aléatoire effectué tous les ans, on choisit un client de cette grande surface.
Pour tout nombre entier naturel n, on note :

- b_n : la probabilité que le client choisi lors de l'année 2013+n soit un "*consommateur bio*" ;
- c_n : la probabilité que le client choisi lors de l'année 2013+n ne soit pas un "*consommateur bio*".
- P_n : la matrice ligne $\begin{pmatrix} b_n & c_n \end{pmatrix}$ donnant l'état probabiliste lors de l'année 2013+n.

1. a. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets B et C où B correspond à l'état "*consommateur bio*".
   b. Donner P_0 l'état probabliste en 2013 et la matrice M de transition correspondant à ce graphe, les sommets B et C étant classés dans cet ordre.
   c. On donne la matrice M^2 :
   $$M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}825 & 0{,}175 \\ 0{,}2625 & 0{,}7375 \end{pmatrix}$$
   En précisant la méthode de calcul, déterminer la probabilité que le client choisi en 2015 soit un "*consommateur bio*".
   d. Déterminer l'état stable $\begin{pmatrix} b & c \end{pmatrix}$ du graphe probabiliste.
2. Le directeur du supermarché affirme que, dans un futur proche, plus de la moitié de sa clientèle aura le profil "*consommateur bio*".
   a. Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'à

la fin de son exécution la variable `N` est pour valeur le nombre minimal d'années pour que l'affirmation du directeur soit vérifiée :

```
N ← 0
B ← 0,2
C ← 0,8
Tant que ...
    B ← 0,9× B+0,15× C
    C ←  1−B
    N ←  N+1
Fin Tant que
```

Exercice 6401

Alice participe à une compétition de tir à l'arc ; elle effectue plusieurs lancers de flèches.
Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivante est égale à 0,9.
Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, Alice se déconcentre et la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivante est égale à 0,4.
On suppose qu'au premier lancer, elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.
Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :

- a_n la probabilité qu'Alice atteigne la cible au n-ième lancer ;
- b_n la probabilité qu'Alice manque la cible au n-ième lancer ;
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste au n-ième lancer.

1. a. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B (*A représentant l'état "Alice atteint la cible" et B l'état "Alice manque sa cible"*).

   b. Indiquer la matrice de transition M associée à ce graphe. On prendra les sommets A et B dans l'ordre $(A\,;B)$.

   c. Justifier que :
   $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$; $P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}35 \end{pmatrix}$

2. a. Montrer que, pour tout nombre entier n strictement positif :
   $a_{n+1} = 0{,}9{\cdot}a_n + 0{,}4{\cdot}b_n$

   b. En déduire que, pour tout nombre entier n strictement positif :
   $a_{n+1} = 0{,}5{\cdot}a_n + 0{,}4$

3. a. On considère ci-dessous la fonction `f` d'un algorithme prenant pour paramètre l'argument `n` qui est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

```
Fonction f(n)
    a ← 0,5
    b ← 0,5
    Pour i allant de 2 à n
        a ← ...× a+...
        b ←  1−a
    Fin Pour
    Renvoyer (a;b)
```

   Compléter la fonction `f` afin qu'à la fin de son exécution, le couple renvoyé par cette fonction indique l'état probabiliste au n-ième lancer.

   b. Déterminer le couple de valeurs renvoyées lorsque cette fonction est appelée avec pour argument $n=5$.

4. a. On considère la suite (u_n) définie pour tout nombre entier naturel n strcitement positif par :
   $u_n = a_n - 0{,}8$.
   Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   b. Donner l'expression de u_n en fonction de n, puis en déduire que pour tout nombre entier naturel n strictement positif :
   $a_n = 0{,}8 - 0{,}3{\times}0{,}5^{n-1}$.

   c. A long terme, que peut-on penser de la probabilité qu'Alice atteigne la cible?

   d. Par quelle autre méthode aurait-on trouver le résultat précédent?

Exercice 6404

La première semaine de l'année, le responsable de la communication d'une grande entreprise propose aux employés de se déterminer sur un nouveau logo, le choix devant être fait par un vote en fin d'année.

Deux logos, désignés respectivement par A et B, sont soumis au choix.

Lors de la présentation qui se déroule la première semaine de l'année, 24 % des employés sont favorables au logo A et tous les autres employés sont favorables au logo B.

Les discussions entre employés font évoluer cette répartition tout au long de l'année.

Ainsi, 9 % des employés favorables au logo A changent d'avis la semaine suivante et 16 % des employés favorables au logo B changent d'avis la semaine suivante.

Pour tout n, $n \geqslant 1$, on note :

- a_n la probabilité qu'un employé soit favorable au logo A la semaine n ;
- b_n la probabilité qu'un employé soit favorable au logo B la semaine n ;
- P_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ traduisant l'état probabiliste la semaine n.

On a donc, pour tout $n \geqslant 1$:
$a_n + b_n = 1$; $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}24 & 0{,}76 \end{pmatrix}$

1. Traduire la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.

2. Déterminer la matrice de transition M de ce graphe, en rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique.

3. a. A l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times M$, exprimer, pour tout $n \geqslant 1$, a_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.

   b. En déduire que l'on a, pour tout $n \geqslant 1$:
   $a_{n+1} = 0{,}75{\cdot}a_n + 0{,}16$.

4. A l'aide de la calculatrice, donner, sans justifier, la probabilité à 0,001 près qu'un employé soit favorable au logo A la semaine 4.

5. On note $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ l'état stable de la répartition des employés.

   a. Déterminer un système de deux équations que doivent vérifier a et b.

   b. Résoudre le système obtenu dans la question précédente.

c. On admet que l'état stable est $P=\begin{pmatrix}0{,}64 & 0{,}36\end{pmatrix}$. Interpréter le résultat.

6. On considère l'algorithme suivant :

```
A ← 0,24
N ← 0
Tant que  A<0,639
    N ← N+1
    A ← 0,75× A+0,16
Fin Tant que
```

Donner, après l'exécution de l'algorithme, une interprétation de la valeur de la variable N *(on ne demande pas de donner la valeur de N en fin d'exécution de l'algorithme).*

Exercice 6421

Dans un pays, seulement deux opérateurs de téléphonie mobile SAFIR et TECIM proposent la 4G *(standard de transmission de données).*
Une étude a montré que d'une année à l'autre :

- 41 % des clients de l'opérateur $SAFIR$ le quittent pour l'opérateur TECIM ;
- 9 % des clients de l'opérateur TECIM le quittent pour l'opérateur SAFIR ;
- Aucun client ne renonce à l'utilisation de la 4G.

Cette situation peut être modélisée par un graphe probabiliste $\mathcal{G}$ de sommets S et T où :

- S est l'évènement "*l'utilisateur de la 4G est un client de l'opérateur SAFIR*" ;
- T est l'évènement "*L'utilisateur de la 4G est un client de l'opérateur TECIM*" ;

On note $P_n=\begin{pmatrix}s_n & t_n\end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année 2014+n.

Dans cet exercice, on se propose de savoir si l'opérateur TECIM atteindra l'objectif d'avoir comme clients au moins 80 % de la population utilisatrice de la 4G.

Partie A

1. Dessiner le graphe probabiliste $\mathcal{G}$.

2. On admet que la matrice de transition du graphe $\mathcal{G}$ en considérant les sommets dans l'ordre S et T est

$$M=\begin{pmatrix}0{,}59 & 0{,}41\\ 0{,}09 & 0{,}91\end{pmatrix}$$

On note $P=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}$ la matrice ligne correspondant à l'état stable de ce graphe $\mathcal{G}$.

a. Montrer que les nombres a et b sont les solutions du système : $\begin{cases} 0{,}41{\cdot}a - 0{,}09{\cdot}b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$

b. Résoudre le système précédent.

3. On admet que $a=0{,}18$ et $b=0{,}82$.
Déterminer, en justifiant, si l'opérateur TECIM peut espérer atteindre son objectif.

Partie B

En 2014, on sait que 35 % des utilisateurs de la 4G sont des clients de l'opérateur SAFIR et que 65 % sont des clients de l'opérateur TECIM. Ainsi : $P_0=\begin{pmatrix}0{,}35 & 0{,}65\end{pmatrix}$.

1. Déterminer la répartition des clients de la 4G au bout de 2 ans.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :
$t_{n+1}=0{,}5{\cdot}t_n+0{,}41$

3. Pour déterminer au bout de combien d'années, l'opérateur TECIM atteindra son objectif, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-dessous. Recopier et compléter les lignes $\ell.4$ et $\ell.5$ afin qu'en fin d'exécution la valeur de la variable N donne le résultat attendu.

```
ℓ.1   T ← 0,65
ℓ.2   N ← 0
ℓ.3   Tant que  T<0,80
ℓ.4       T ← ...
ℓ.5       N ← ...
ℓ.6   Fin Tant que
```

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n=t_n-0{,}82$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5. Préciser son premier terme.

b. En déduire que : $t_n=-0{,}17\times 0{,}5^n+0{,}82$

c. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation :
$-0{,}17\times 0{,}5^n+0{,}82 \geqslant 0{,}80$.

d. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

4. Graphe pondéré et probabiliste :

Exercice 6411

Une étude est réalisée chaque hiver sur une population composée de personnes qui peuvent pratiquer le ski de piste ou le snowboard.
L'élève révèle que :

- Si une personne pratique le ski de piste, alors la probabilité qu'elle pratique le snowboard l'hiver suivant est égale à 0,2.
- Si une personne pratique le snowboard, alors la probabilité qu'elle pratique le ski de piste l'hiver suivant est égale à 0,3.

On note S l'état : "*la personne partique le ski de piste*" et $\overline{S}$ l'état : "*la personne pratique le snowboard*".
On note également pour tout entier naturel n :

- p_n la probabilité qu'une personne pratique le ski de piste lors du n-ième hiver ;
- q_n la probabilité qu'une personne pratique le snowboard lors du n-ième hiver ;
- $P_n=\begin{pmatrix}p_n & q_n\end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état proba-

biliste du système lors du n-ième hiver.

On suppose que la population initiale ne comporte que des personnes pratiquant le ski de piste, on a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets S et $\overline{S}$.

2. a. Donner la matrice de transition M de ce graphe probabiliste.

   b. Calculer M^2.

   c. Déterminer l'état probabiliste P_2.

3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :
   $p_{n+1} = 0{,}5 \cdot p_n + 0{,}3$.

4. On considère l'algorithme suivant :

Variables
$\ell.1$ J et N sont des entiers naturels
$\ell.2$ p est un nombre réel
Entrée
$\ell.3$ Saisir N
Initialisation
$\ell.4$ p prend la valeur 1
Traitement
$\ell.5$ Pour J allant de 1 à N
$\ell.6$ p prend la valeur ....
$\ell.7$ Fin Pour
Sortie
$\ell.8$ Afficher p

Recopier et compléter la ligne 6 de cet algorithme afin d'obtenir la probabilité p_n.

Partie B

On considère, pour tout entier naturel n, l'évènement S_n : "*la personne pratique le ski de piste lors du n-ième hiver*".
La probabilité de l'évènement S_n est notée $p(S_n)$. On a donc :
$p_n = p(S_n)$.
On sait d'après la **partie A** que pour tout entier naturel n :
$p_{n+1} = 0{,}5 \cdot p_n + 0{,}3$
Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :
$u_n = p_n - 0{,}6$.

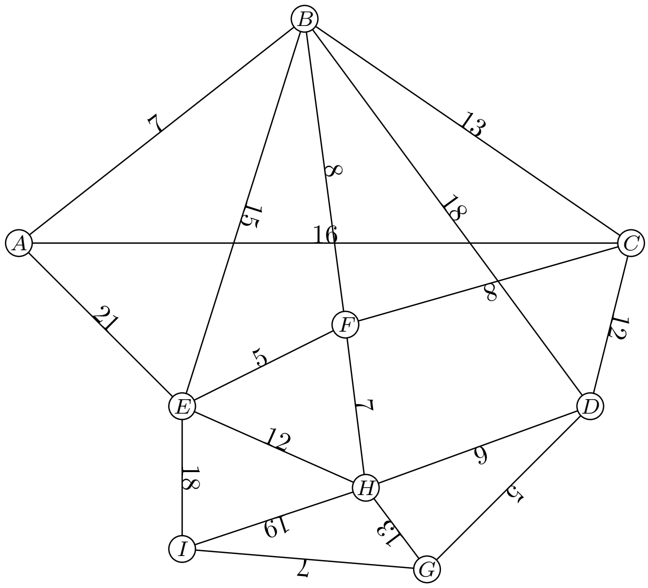
1. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et préciser la valeur de u_0.

2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis l'expression de p_n en fonction de n.

3. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat.

Partie C

Une partie du domaine skiable est représentée par le graphe ci-dessous.
Le sommet A représente le haut des pistes de ski et le sommet I en représente le bas.
Les sommets B, C, D, E, F, G et H représentent des points de passages.
Chacune des arêtes est pondérée par la distance, en centaine de mètres, entre deux sommets.



Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, la distance minimale permettant de relier le sommet A au sommet I.

