Terminale Option Complémentaire/Intégration

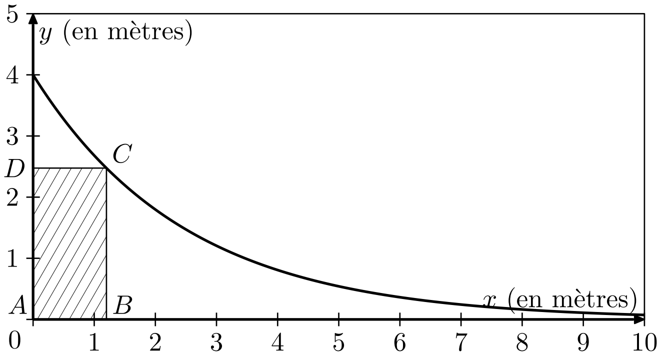
1. Autour des aires :

Exercice 1

Un publicitaire envisage la pose d'un panneau publicitaire rectangulaire sous une partie de rampe de skateboard. Le profil de cette rampe est modélisé par la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$f(x) = 4\cdot\mathrm{e}^{-0,4x}$

Cette courbe $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous dans un repère d'origine O :



Le rectangle $ABCD$ représente le panneau publicitaire et répond aux contraintes suivantes : le point A est situé à l'origine du repère, le point B est sur l'axe des abscisses, le point D est sur l'axe des ordonnées et le point C est sur la courbe $\mathscr{C}_f$.

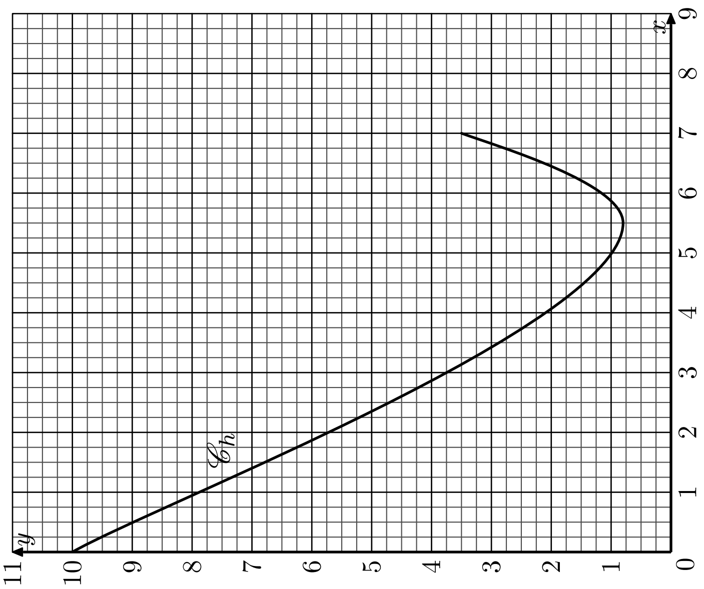
On suppose que le point B a pour abscisse $x=2$.
Montrer qu'une valeur approchée de l'aire du panneau publicitaire est $3{,}6\,m^2$.

2. Encadrement d'aires :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 2

On considère la fonction h définie sur $[0\,;7]$ et représentée par la courbe ci-dessous :



Parmi les propositions ci-dessous, une seule est exacte. Laquelle?

a. $\displaystyle\int_0^5 h(x)\,\mathrm{d}x = h(5)-h(0)$

b. $\displaystyle 20 < \int_0^5 h(x)\,\mathrm{d}x < 30$

c. $\displaystyle 15 < \int_0^5 h(x)\,\mathrm{d}x < 20$

d. $\displaystyle\int_0^5 h(x)\,\mathrm{d}x = 20$

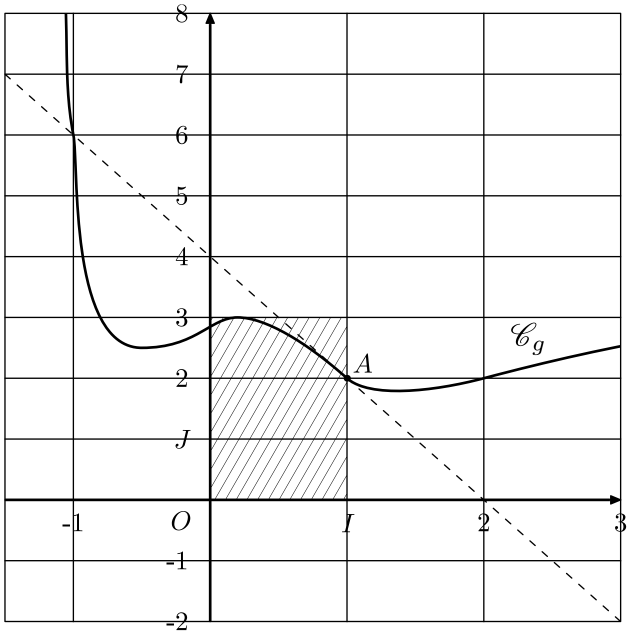
Exercice 3

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

On rappelle que $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$.
On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on rappelle que g' désigne la fonction dérivée de la fonction g.

On a tracé en pointillé la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point A de cette courbe, d'abscisse 1 et d'ordonnée 2. Cette tangente coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 2.



- **Affirmation 1 :** $g'(1) = -2$
- **Affirmation 2 :** $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x < 3$

3. Calcul d'intégrales et recherche de primitives :

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[3\,;13]$ par :
$f(x) = -2x + 20 - \mathrm{e}^{-2x+10}$

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_3^{13} f(x)\,\mathrm{d}x$.

On donne la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3}.

4. Calcul d'intégrales : utilisation des primitives :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 5

L'évolution de la population d'une station balnéaire pour l'été 2015 a été modélisée par une fonction f, définie sur l'intervalle $[0\,;70]$, dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

Lorsque x est le nombre de jours écoulés après le 1^{er} juillet, $f(x)$ désigne la population en milliers d'habitants.
Ainsi, $x=30$ correspond au 31 juillet et $f(30)$ représente la population qu'il est prévu d'accueillir le 31 juillet.
On estime qu'un habitant utilisera chaque jour entre 45 et 55 litres d'eau par jour.

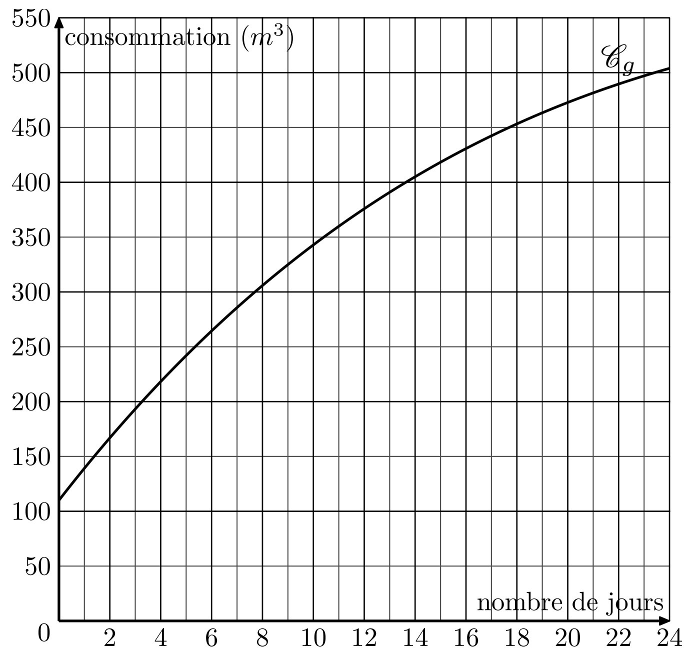
On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;70]$ par :
$g(x) = 110 + 11{\cdot}x{\cdot}\mathrm{e}^{-0{,}025\cdot x+1}$

Lorsque x est le nombre de jours écoulés après le 1^{er} juillet, $g(x)$ représente alors la consommation maximale d'eau prévue ce jour là et exprimée en m^3.
Soit la fonction G définie sur l'intervalle $[0\,;70]$ par :
$G(x) = 110{\cdot}x - \big(440{\cdot}x + 17\,600\big){\cdot}\mathrm{e}^{-0{,}025\cdot x+1}$

On admet que la fonction G est une primitive de la fonction g.
La somme $S = g(10)+g(11)+g(12)+\cdots+g(20)$ représente la consommation maximale d'eau du 10^e au 20^e jour exprimée en m^3.

1. En l'illustrant sur la courbe $\mathscr{C}_g$ ci-dessous, donner une interprétation graphique en termes d'aires de la somme S.

2. En déduire une valeur approximative de cette quantité d'eau consommée du 10^{e} au 20^{e} jour.



Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $]0\,;15]$ par :
$f(x) = 9{\cdot}x^2{\cdot}\big(1 - 2{\cdot}\ln x\big) + 10$

On donne la fonction F définie sur l'intervalle $]0\,;1{,}5]$ par :

$F(x) = 10{\cdot}x + 5{\cdot}x^3 - 6x^3{\cdot}\ln x$

1. Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $\big]0\,;1{,}5\big]$.

2. Calculer $\displaystyle\int_1^{1{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x$.
On donnera le résultat arrondi au centième.

Exercice 7

La fonction f précédente est définie sur l'intervalle $\big[-4\,;10\big]$ par : $f(x)=\big(x+4\big){\cdot}\mathrm{e}^{-0{,}5{\cdot}x}$

On considère la fonction F définie par :
$F(x)=\big(-2{\cdot}x-12\big){\cdot}\mathrm{e}^{-0{,}5{\cdot}x}$.

1. Comment peut-on montrer que F est une primitive de f sur l'intervalle $\big[-4\,;10\big]$? *On ne demande pas d'effectuer cette vérification.*

2. Calculer : $S=\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$
On en donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

Exercice 8

On admet que la fonction f est définie par :

$f(x) = \big(x^2 - 2{\cdot}x + 1\big){\cdot}\mathrm{e}^{-2x+6}$

A l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats ci-dessous qui pourront être utilisés sans être démontrés :

L1	`f(x):=(x^2-2x+1)*e^(-2x+6)` $\rightarrow f(x) = \big(x^2 - 2{\cdot}x + 1\big){\cdot}\mathrm{e}^{-2x+6}$
L2	`f'(x):=Dérivée[f(x)]` $\rightarrow f'(x) = \big(-2{\cdot}x^2 + 6{\cdot}x - 4\big){\cdot}\mathrm{e}^{-2x+6}$
L3	`g(x):=Dérivée[f'(x)]` $\rightarrow g(x) = -16{\cdot}x{\cdot}\mathrm{e}^{-2x+6} + 4{\cdot}x^2{\cdot}\mathrm{e}^{-2x+6} + 14{\cdot}\mathrm{e}^{-2x+6}$
L4	`Factoriser[g(x)]` $\rightarrow 2{\cdot}\mathrm{e}^{-2x+6}{\cdot}\big(2{\cdot}x^2 - 8{\cdot}x + 7\big)$
L5	`Résoudre[g(x)=0]` $\rightarrow \left\{x = \dfrac{-\sqrt{2}+4}{2}\,;\,x = \dfrac{\sqrt{2}+4}{2}\right\}$
L6	`F(x):=Primitive[f(x)]` $\rightarrow F(x) = \dfrac{1}{4}{\cdot}\big(-2{\cdot}x^2 + 2{\cdot}x - 1\big){\cdot}\mathrm{e}^{-2{\cdot}x+6}$

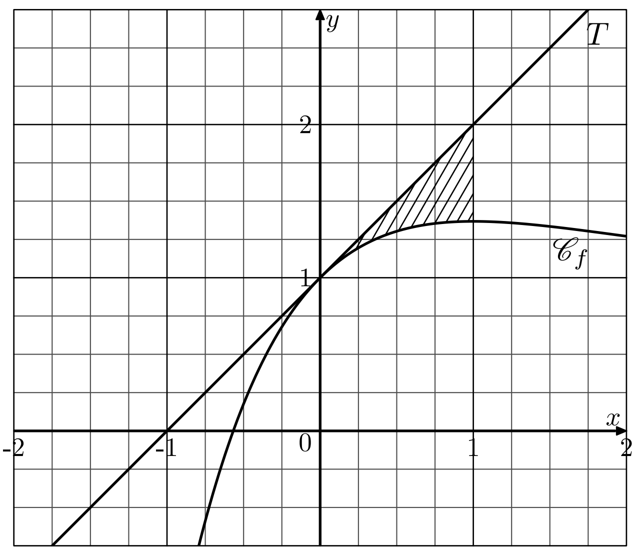
On pose $I=\displaystyle\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$. Calculer la valeur exacte de I puis la valeur arrondie à 10^{-1}.

5. Aire entre deux courbes :

Exercice 9

On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x{\cdot}\mathrm{e}^{-x} + 1$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan et f' la fonction dérivée de f.



1. a. Montrer que, pour tout réel x : $f'(x)=\mathrm{e}^{-x}{\cdot}(1-x)$

   b. Montrer que l'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est : $y=x+1$.

On admet que la tangente T est située au dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et la tangente T dans un repère orthonormé.

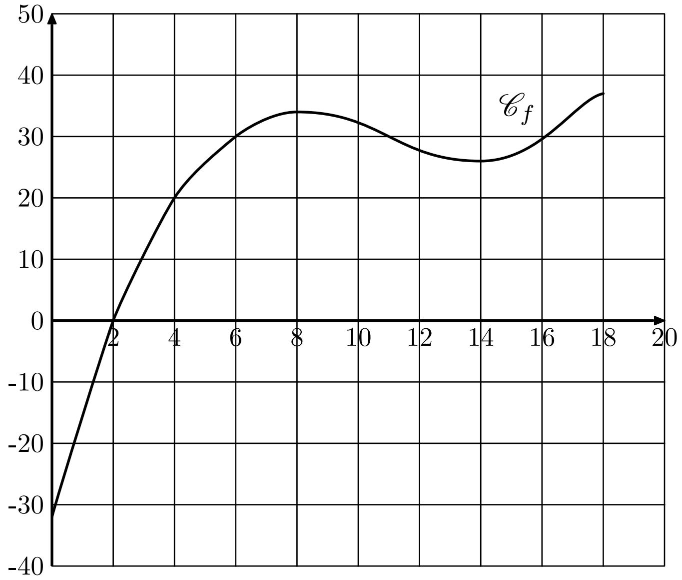
   a. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $F(x) = \mathrm{e}^{-x}{\cdot}\big(-1 - x\big) + x$
   Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   b. Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine hachuré compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, la tangente T et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ puis donner le résultat arrondi à 10^{-3} près.

6. Propriétés des primitives :

Exercice 10

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $\big[0\,;18\big]$:



Laquelle des réponses ci-dessous est correcte?

a. Toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;18]$ sont négatives sur l'intervalle $[0\,;2]$.

b. Toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;18]$ sont négatives sur l'intervalle $[8\,;12]$.

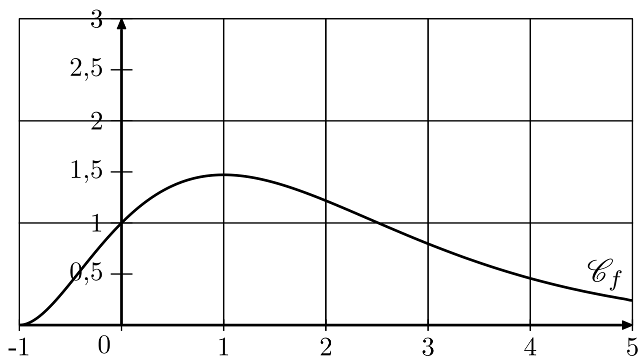
c. Toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;18]$ sont croissantes sur l'intervalle $[0\,;2]$.

d. Toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;18]$ sont croissantes sur l'intervalle $[8\,;12]$.

7. Etudes de fonctions :

Exercice 11

Dans un repère orthonormé du plan, on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1\,;5]$.
On note f' la fonction dérivée de f.



1. On admet que la fonction F définie sur $[-1\,;5]$ par :
$F(x) = -(x^2+4{\cdot}x+5){\cdot}\mathrm{e}^{-x}$
est une primite de la fonction f.

a. En déduire l'expression de $f(x)$ sur $[-1\,;5]$.

b. Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire du domaine du plan limité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

2. Montrer que sur l'intervalle $[1\,;5]$, l'équation $f(x)=1$ admet au moins une solution.

8. Moyenne :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 12

Dans cet exercice, on étudie l'évolution de la dépense des ménages français en programmes audiovisuels *(redevance audiovisuelle, billets de cinémas, vidéos,...)*.

On note D_n la dépense des ménages en programmes audiovisuels, exprimée en milliards d'euros, au cours de l'année $1995+n$.

année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
n	0	1	2	3	4	5	6	7
D_n	4,95	5,15	5,25	5,4	5,7	6,3	6,55	6,9

année	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
n	8	9	10	11	12	13	14	15
D_n	7,3	7,75	7,65	7,79	7,64	7,82	7,89	8,08

Soit f la fonction définie, pour tout nombre réel x, par :
$f(x) = -0{,}0032{\cdot}x^3 + 0{,}06{\cdot}x^2 + 5$

Pour tout entier n vérifiant $0 \leqslant n \leqslant 20$, on décide de modéliser la dépense des ménages français en programmes audiovisuels exprimée en milliards d'euros, au cours de l'année $1995+n$ par le nombre $f(n)$.

1. Calculer $f(5)$.

2. Déterminer le pourcentage p, de l'erreur commise en remplaçant D_5 par $f(5)$.

(Le pourcentage d'erreur est obtenu par le calcul p=

$\frac{\text{valeur réelle-valeur estimée}}{\text{valeur réelle}}$ et le résultat sera donnée à 0,1 % près.)

3. En utilisant la fonction f, quelle estimation de la dépense totale peut-on effectuer pour l'année 2013? *(On arrondira le résultat au centième de milliard d'euros).*

4. On veut utiliser la fonction f pour estimer la dépense moyenne des ménages entre le 1er janvier 1995 et le 1er janvier 2015.

   On calcule pour cela : $M = \frac{1}{20} \cdot \int_0^{20} f(x)\,dx$

   a. Déterminer une primitive de F de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;20]$.

   b. Calculer M.

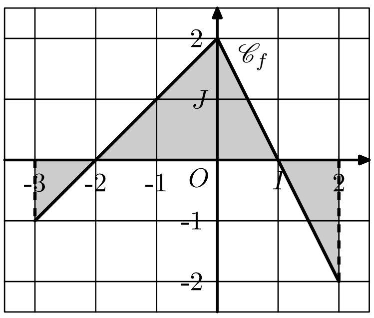
9. Calculs d'aires :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 13

On considère la partie du plan représentée en gris ci-contre :

Déterminer l'aire de la partie grisée.

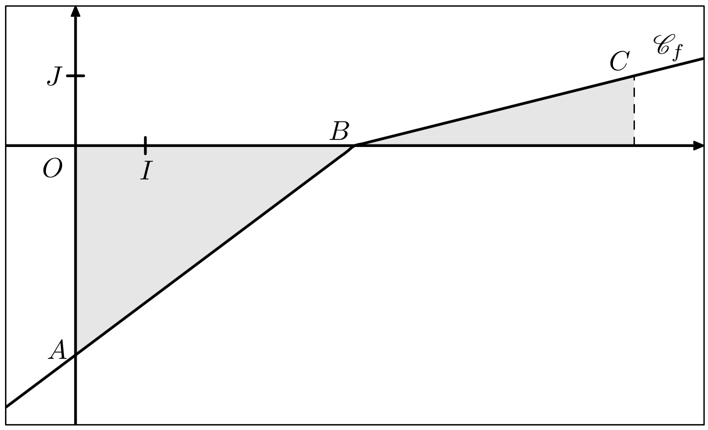


Exercice 14

On considère la fonction f définie par morceaux par la relation ci-dessous :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3}{4}\cdot x - 3 & \text{sur l'intervalle }]-\infty\,;4] \\ f(x) = \frac{1}{4}\cdot x - 1 & \text{sur l'intervalle } [4\,;+\infty[\end{cases}$$

Ci-dessous, est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



Les points A, B et C sont des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ où le point C a pour ordonnée 1.

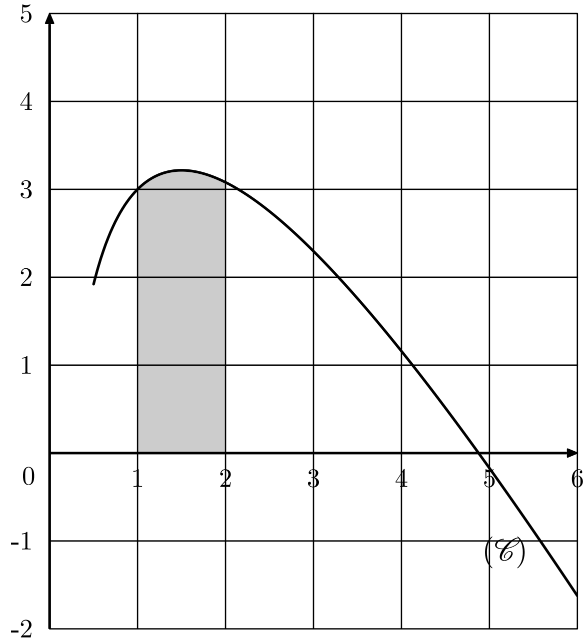
1. Déterminer les coordonnées des points A, B et C.

2. Déterminer l'aire de la surface grisée.

10. Encadrement de l'aire avec des rectangles :

Exercice 15

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $[0{,}5\,;6]$.



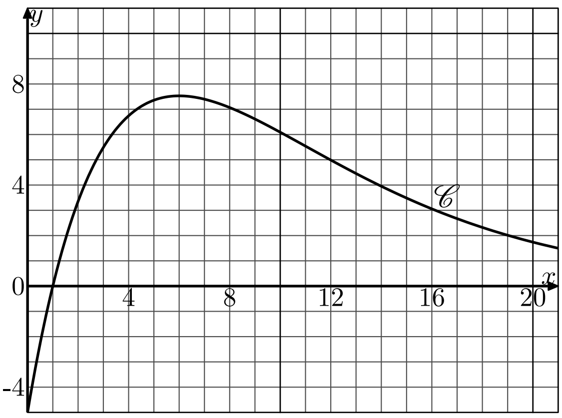
Donner un encadrement de l'aire, en unités d'aire et à l'unité près, du domaine compris entre la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

Exercice 16

On a représenté ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0;20]$.

Déterminer un encadrement, d'amplitude 4, par deux nombres entiers de :

$$I = \int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x$$



Exercice 17

Parmi les quatre propositions ci-dessous, une seule est correcte. Laquelle?

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[-10;10]$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-10		-5		3		10
Variation de g	7	↘	2	↗	4	↘	-6

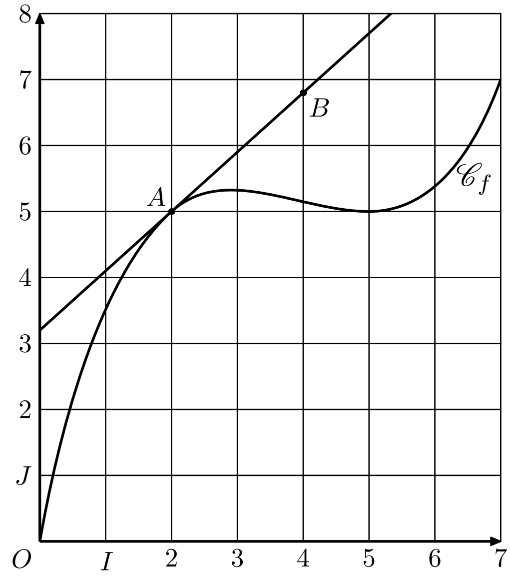
On note $I = \int_{-5}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x$. On peut affirmer que :

a. $-5 \leqslant I \leqslant 3$ b. $2 \leqslant I \leqslant 4$

c. $16 \leqslant I \leqslant 32$ d. $4 \leqslant I \leqslant 8$

Exercice 18

Sur le graphique ci-dessous est représentée la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[0;7]$. Les points A et B ont pour coordonnées $A(2;5)$ et $B(4;6,8)$. La droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.



a. La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A admet pour équation :

- **Affirmation 1 :** $y = -0{,}9\cdot x + 6{,}8$
- **Affirmation 2 :** $y = 0{,}9\cdot x + 3{,}5$
- **Affirmation 3 :** $y = 0{,}9\cdot x + 3{,}2$
- **Affirmation 4 :** $y = 1{,}8\cdot x + 1{,}4$

b.
- **Affirmation 1 :** $f(0) \leqslant \int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(5)$
- **Affirmation 2 :** $2 \leqslant \int_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 7$
- **Affirmation 3 :** $18 \leqslant \int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 19$
- **Affirmation 4 :** $25 \leqslant \int_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 31$

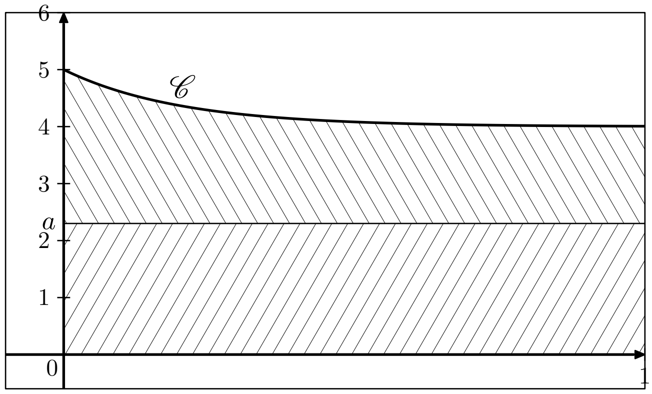
Exercice 19

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par :
$f(x) = 4 + \mathrm{e}^{-5x}$

On a tracé dans le repère ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repère du plan.

Le domaine $\mathcal{D}$ hachuré sur la figure est le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

On veut partager le domaine hachuré en deux domaines de même aire par une droite d'équation $y = a$, parallèle à l'axe des abscisses, selon l'exemple donné ci-dessous.



Justifier que la valeur $a = 3$ ne convient pas.

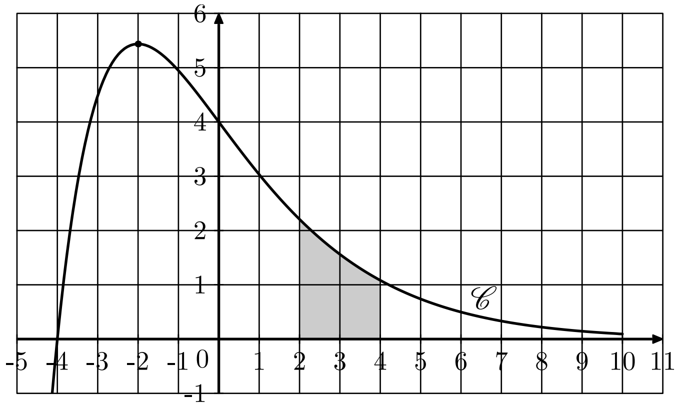
11. Encadrement de l'aire avec des triangles :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 20

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;10]$.

Le domaine $\mathcal{S}$ grisé sur la figure est le domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x=2$ et la droite d'équation $x=4$.



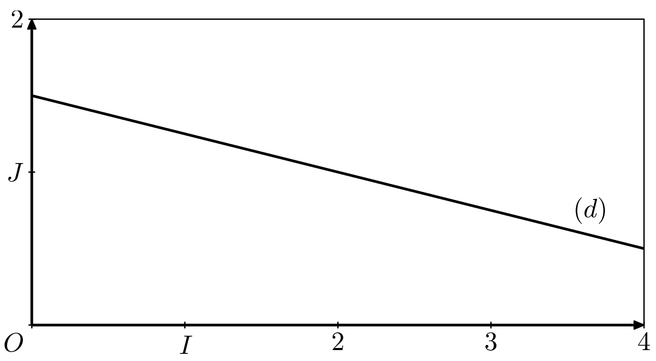
Déterminer, par une lecture graphique, un encadrement par deux entiers consécutifs de l'aire du domaine $\mathcal{S}$ grisé sur la figure.

12. Introduction au calcul intégral :

Exercice 21

Ci dessous est représentée, dans un repère $(O\,;I\,;J)$, la droite (d) admettant pour équation réduite :

(d) : $y=-0{,}25{\cdot}x+1{,}5$



1. a. Placer les points $A(3\,;0)$, $C(0\,;1{,}5)$ et le point B ayant pour abscisse 3 et appartenant à la droite (d).

   b. Déterminer l'aire du trapèze $OABC$.

2. Pour tout réel x strictement positif, on admet que l'aire du trapèze $OMNC$ où les points M et N ont pour abscisse x et appartiennent respectivement à l'axe des abscisses et à la droite (d) est déterminée par l'image de x par la fonction F définie par :

   $F(x)=-0{,}125{\cdot}x^2+1{,}5{\cdot}x$

   a. Vérifier le résultat de la question 1. b..

   b. On considère le domaine $\mathcal{D}$ délimité par :
   - la droite (d) et l'axe des abscisses ;
   - les droites d'équations $x=1$ et $x=3$.

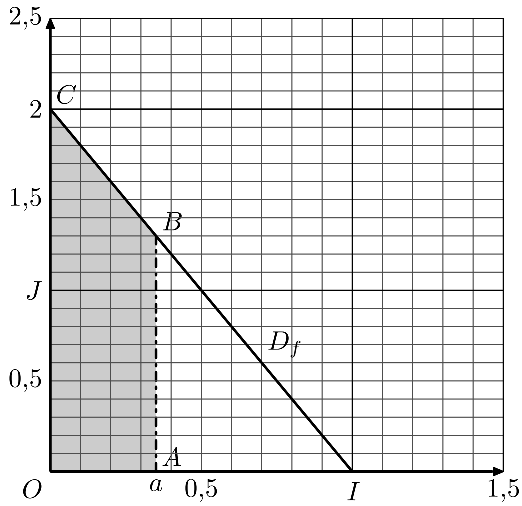
   A l'aide de la fonction f, déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

Exercice 22

Soit f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par :

$f(x)=2-2{\cdot}x$

On a tracé ci-dessous la droite $\mathcal{D}_f$, représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ du plan.
Le point C a pour coordonnées $(0\,;2)$.
Δ est la partie du plan intérieure au triangle OIC.
Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1 ; on note A le point de coordonnées $(a\,;0)$ et B le point de $\mathcal{D}_f$ de coordonnées $(a\,;f(a))$.
Le but de cet exercice est de trouver la valeur de a, telle que le segment $[AB]$ partage Δ en deux parties de même aire.
Déterminer la valeur exacte de a, puis une valeur approchée au centième.



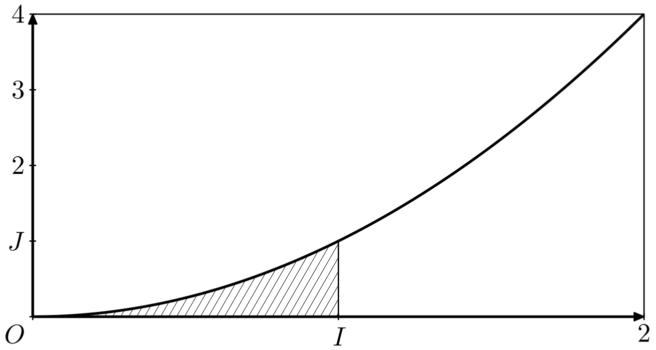
13. Vers l'usage des primitives :

(+2 exercices pour les enseignants)

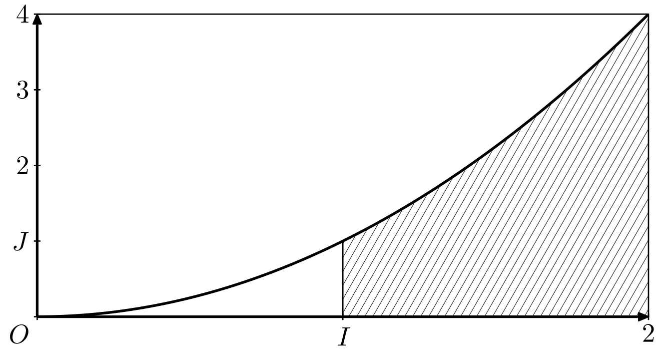
Exercice 23

On considère la fonction carré notée f :
$$f(x) = x^2$$
L'intégrale de la fonction f entre 0 et a est donnée par la formule : $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot a^3$

1. Déterminer l'aire de la partie hachurée :



2. Déterminer l'aire de la partie hachurée :

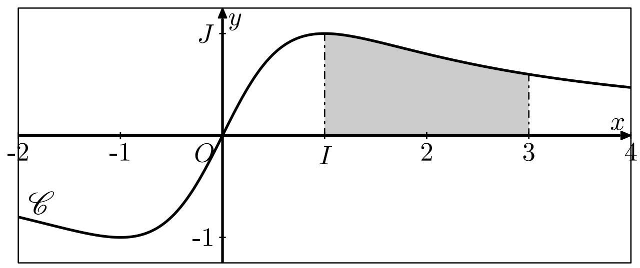


14. Calculatrice et calcul d'intégrales :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 24

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$$f(x) = \frac{2\cdot x}{x^2+1}$$
Ci-dessous est donnée la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f :



On désigne par $\mathcal{D}$ le domaine grisé ci-dessus.

1. Décrire le domaine $\mathcal{D}$.

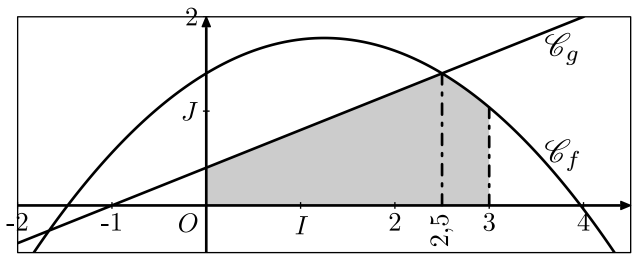
2. A l'aide de la calculatrice, détermine l'aire du domaine $\mathcal{D}$ à 10^{-4} près.

15. Jonction de deux courbes :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 25

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$$f(x) = -0{,}24\cdot x^2 + 0{,}6\cdot x + 1{,}4 \quad ; \quad g(x) = 0{,}4\cdot x + 0{,}4$$
Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, on a les représentations des courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ respectivement des fonctions f et g :



Pour a un nombre réel compris entre $[-1\,;4]$, on a les informations complémentaires :

- Pour a un nombre réel de l'intervalle $[0\,;4]$, on note I_a l'aire du domaine sous la courbe $\mathscr{C}_f$ compris entre les droites $x=0$ et $x=a$. Voici un tableau de valeurs de I_a arrondies à 10^{-3} :

a	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
I_a	0	0,765	1,62	2,505	3,36	4,125	4,74	5,145	5,28

- Pour calculer l'aire du domaine sous la courbe $\mathscr{C}_g$ compris entre les droites $x=-1$ et $x=a$, on utilise le calcul intégral suivant :
$$\int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}2\cdot a^2 + 0{,}4\cdot a$$

Déterminer l'aire grisé en laissant les étapes de votre raisonnement.

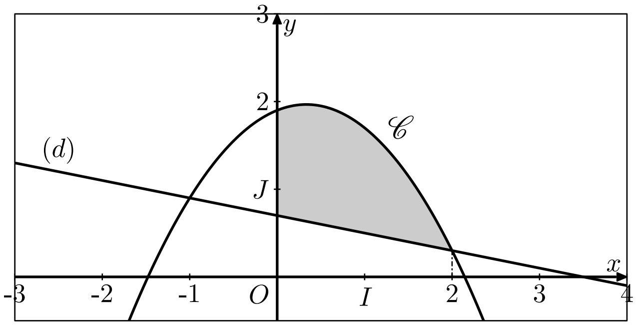
16. Domaine entre deux courbes :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 26

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = -0{,}6{\cdot}x^2 + 0{,}4{\cdot}x + 1{,}9$

Ci-dessous est donnée la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans le repère $(O\,;I\,;J)$:



On considère la droite (d), courbe représentative de la fonction g définie par :
$g(x) = -0{,}2{\cdot}x + 0{,}7$

On admet que la courbe $\mathscr{C}$ se situe au dessus de la droite (d) sur l'intervalle $[-1\,;2]$.

Le domaine $\mathcal{D}$ est le domaine du plan ayant pour caractéristiques :

- délimité par les droites $x=0$ et $x=2$
- situé entre la droite (d) et la courbe $\mathscr{C}$

On utilisera les données suivantes :

- Pour tout nombre a appartenant à l'intervalle $[-1\,;2]$, on note I_a l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-1$ et $x=a$. Ci-dessous est donné un tableau de valeurs arrondies à 10^{-3} près :

a	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
I_a	0	0,625	1,5	2,475	3,4	4,125	4,5

- Pour tout nombre $a \in [0\,;2]$, on admet que l'intégrale de la fonction g de 0 à a a pour valeur :
$$\int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x = -0{,}1{\cdot}a^2 + 0{,}7{\cdot}a$$

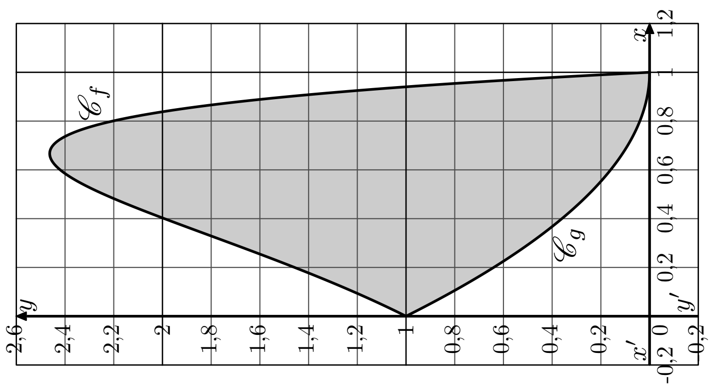
Déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

17. Domaine entre deux courbes et calculatrices :

Exercice 27

Une entreprise souhaite utiliser un motif décoratif pour sa communication.
Pour réaliser ce motif, on modélise sa forme à l'aide de deux fonctions f et g définies pour tout réel x de $[0\,;1]$ par :
$f(x) = (1-x){\cdot}\mathrm{e}^{3x} \quad ; \quad g(x) = x^2 - 2{\cdot}x + 1$

Leurs courbes représentatives seront notées $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



Déterminer l'aire, arrondie au millième près, de la partie grisée sur le graphique comprise entre les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $[0\,;1]$.
(On justifiera les étapes de son raisonnement)

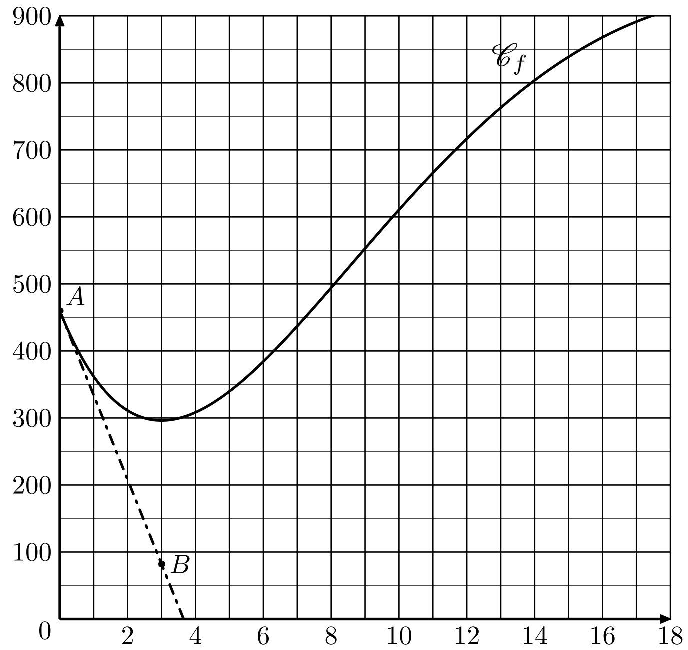
19. Exercices non-classés :

(+5 exercices pour les enseignants)

Exercice 28

Partie A

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous, associée à une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;19]$, représente l'audience journalière d'une chaîne de télévision entre le 1er janvier 2000 *(année numéro* 0*)* et le 1er janvier 2019 *(année numéro* 19*)*, c'est-à-dire quotidien de téléspectateurs, en milliers.



Ainsi, le 1er janvier 2000 la chaîne a été regardée par environ 460 000 téléspectateurs.

1. Décrire l'évolution de l'audience journalière de cette chaîne de télévision entre le 1er janvier 2000 et le 1er janvier 2019.

2. Donner une valeur approchée du nombre de téléspectateurs le 1er janvier 2014.

3. La droite (AB), où les points A et B ont pour coordonnées $A(0\,;460)$ et $B(3\,;82)$ est la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A.
Déterminer la valeur de $f'(0)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f représentée par $(\mathscr{C})$?

Partie B

On cherche maintenant à prévoir l'évolution de l'audience de cette chaîne de télévision lors des dix prochaines années.
On considère que le nombre journalier *(exprimé en milliers)* de téléspectateurs de la chaîne est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;29]$ par :
$f(x) = (20x^2 - 80x + 460)\cdot e^{-0,1x}$
où x représente le nombre d'années depuis 2000 *(par exemple $x=19$ pour l'année 2019)*.

1. Donner une valeur approchée au millier du nombre de téléspectateurs de la chaîne le 1er janvier 2014.

2. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\,;29]$.

   a. Démontrer que f' est définie par :
   $f'(x) = (-2x^2 + 48x - 126)\cdot e^{-0,1x}$

   b. On considère l'équation : $-2x^2+48x-126=0$
   Un logiciel de calcul formel donne :

Instruction :	Résultat
Solve$(-2x^2 + 48x - 126 = 0)$	3 et 21

   Retrouver ce résultat par le calcul.

   c. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;29]$ et construire le tableau des variations de f sur l'intervalle $[0\,;29]$. Arrondir les éléments du tableau à l'unité.

   d. Le nombre journalier de téléspectateurs de cette chaîne de télévision dépassera-t-il la barre du million avant l'année 2029? Justifier.

3. Montrer que l'équation $f(x)=800$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[3\,;21]$. Déterminer un encadrement d'amplitude 1 de α.
Au cours de quelle année le nombre journalier de téléspectateurs de la chaîne de télévision dépassera-t-il 800 000?

4. On admet que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;29]$ par :
$F(x) = (-200x^2 - 3\,2000x - 36\,600)\cdot e^{-0,1x}$
est une primitive de la fonction f.
Déterminer à mille près l'audience journalière moyenne de téléspectateurs de la chaîne de télévision entre le 1er janvier 2018 et le 1er janvier 2019.