Terminale Option Complémentaire/Fonction logarithme népérien

1. Dérivées :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 7003

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :
$f(x) = 3{\cdot}x - x{\cdot}\ln x$

On admet que f est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et on désigne par f' sa fonction dérivée.

Parmi les trois réponses ci-dessous, laquelle est exacte?

a. $f'(x) = 3 - \dfrac{1}{x}$ b. $f'(x) = 3 - \ln x$

c. $f'(x) = 2 - \ln x$

Exercice 7009

On note g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :
$g(x) = \big(x+1\big){\cdot}\ln(x)$

Parmi les réponses ci-dessous, laquelle est correcte?

a. $g'(x) = \dfrac{1}{x}$ b. $g'(x) = 1 + \ln(x)$

c. $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ d. $g'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \ln(x)$

Exercice 7392

Parmi les quatre réponses proposées, une seule est exacte. Préciser laquelle en justifiant votre réponse.

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$f(x) = x{\cdot}\ln(x) - x$

On note f' sa fonction dérivée.

On a alors :

a. $f'(x) = 0$ b. $f'(x) = \ln(x)$

c. $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1$ d. $f'(x) = \dfrac{1}{x} - x$

2. Etude de fonctions :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 7646

Définition -*proposition*

La fonction **logarithme népérien**, notée ln est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et admet le tableau de variations :

x	0	1	e	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	0	1	$+\infty$

De plus, sa fonction dérivée a pour expression :
$\big(\ln x\big)' = \dfrac{1}{x}$

1. Dresser le tableau de signes de la fonction logarithme népérien.
2. On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
   $f(x) = x - \ln(x)$
   a. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
   b. Etablir le tableau de signes de la fonction f'
   c. Préciser les sens de variations de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 7433

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;10]$ par :
$f(x) = -x{\cdot}\ln x + 2{\cdot}x + 1$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Démontrer que la fonction f admet un maximum sur l'intervalle $]0\,;10]$.
3. Calculer la valeur exacte du maximum de la fonction f sur ce même intervalle.

3. Théorème des valeurs intermédiaires :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 7441

Une entreprise produit et vend des composants électroniques. Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 1 000 et 30 000 pièces. On suppose que toute la production est commercialisée.

Le bénéfice en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x milliers de pièces, est donné sur l'intervalle $[1\,;30]$ par :

$B(x) = -0{,}5\cdot x^2 + 6\cdot x - 20 + 2x\cdot \ln x$

1. Montrer que : $B'(x) = -x + 8 + 2\cdot \ln x$ où B' est la dérivée de B sur l'intervalle $[1\,;30]$.

2. On admet que $B''(x) = -1 + \dfrac{2}{x}$, où B'' est la dérivée seconde de B sur l'intervalle $[1\,;30]$.
Justifier le tableau de variations ci-dessous de la fonction dérivée B' sur l'intervalle $[1\,;30]$.

x	1	2	30
Variation de $B'(x)$	7 $\nearrow$	$6+2\ln 2$	$\searrow$ $-22+2\ln 30$

3. a. Montrer que l'équation $B'(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;30]$.

   b. Donner une valeur approchée au millième de la valeur de α.

4. En déduire le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;30]$, et donner le tableau de variations de la fonction bénéfice B sur ce même intervalle.

5. Quel est le nombre de pièces à produire, à l'unité près, pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal?
Quel est ce bénéfice maximal *(arrondi au millier d'euros)*?

4. Propriétés algébriques :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 7701

Une seule des réponses proposées est exacte.
Aucune justification n'est demandée.

La valeur exacte de $\ln\left(10\cdot e^2\right)$ est :

a. $2\cdot\ln(10)+2$ b. $4{,}302\,585\,093$

c. $\ln(10)+2$ d. $2\cdot\ln(10\cdot e)$

Exercice 7744

Parmi les quatre propositions, une seule est exacte. Recopier la proposition exacte sans justification :

Pour tout réel $x<0$, le nombre réel $\ln\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ est égal à :

a. $\ln(x)$ b. $-\ln(-x)$ c. $-\ln(x)$ d. $\dfrac{1}{\ln(x)}$

Exercice 7846

Dire si l'affirmation ci-dessous est vraie ou fausse. Justifier la réponse donnée.

Pour tout réel a strictement positif :

$\ln\left(a^3\right) - \ln\left(a^2\right) = \ln\left(a^{25}\right) - \ln\left(a^{24}\right)$

5. Résolution d'équations :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 7519

Parmi les quatre propositions ci-dessous, une seule est correcte. Laquelle?

La solution de l'équation $x^{23}=92$ est égale à :

a. 4 b. 1,2 c. $e^{\frac{\ln(92)}{23}}$ d. $e^{\frac{\ln(23)}{92}}$

Exercice 7847

Dire si l'affirmation ci-dessous est vraie ou fausse. Justifier la réponse donnée.

L'équation $x\cdot\ln(x)=2\cdot\ln(x)$ admet exactement deux solutions 2 et 1 sur $]0\,;+\infty[$.

6. Résolution d'équations et propriétés algébriques :

Exercice 7692

Parmi les quatre propositions ci-dessous, une seule est correcte. Laquelle?

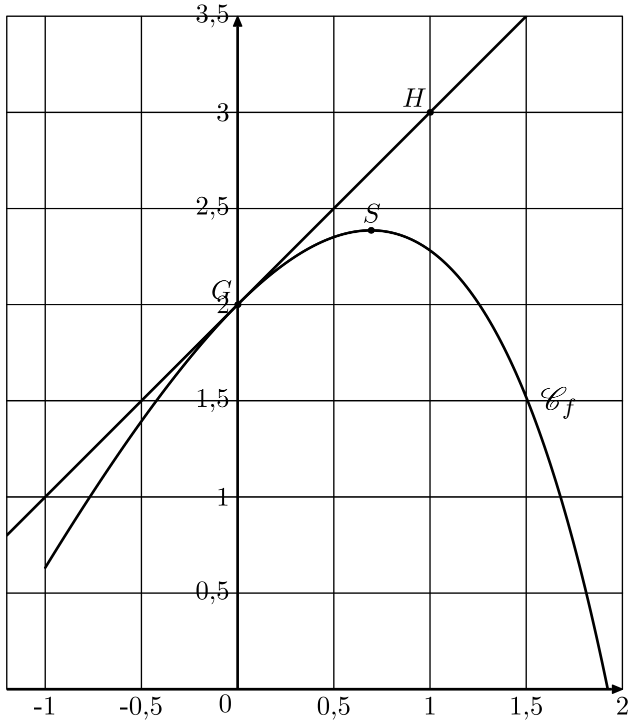
La solution exacte de l'équation $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \dfrac{3}{10}$ est :

a. 1,74 b. $\dfrac{\ln(10)-\ln(3)}{\ln(2)}$ c. $-\dfrac{\ln(3)}{\ln(5)}$ d. 0,5

7. Résolution d'inéquations: graphiquement :

Exercice 7053

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1\,;2]$.



On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Le point G a pour coordonnées $(0\,;2)$.
Le point H a pour coordonnées $(1\,;3)$.
La droite (GH) est la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point G.
La courbe $(\mathscr{C})$ admet une tangente horizontale au point S d'abscisse $\ln 2$.

Aucune justification n'est demandée. Par lecture graphique :

1. Donner les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Résoudre sur $[-1\,;2]$ l'inéquation $f'(x)\leqslant 0$.

8. Résolution d'inéquations :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 7691

Résoudre dans $[0\,;10]$ l'inéquation : $100\cdot e^{-x}-0{,}5\geqslant 0$

Exercice 7045

Parmi les quatre propositions ci-dessous, laquelle est vraie?

Les nombres entiers n solutions de l'inéquation $\left(\frac{1}{2}\right)^n<0{,}003$ sont tous les nombres entiers n tels que :

a. $n\geqslant 8$ b. $n\geqslant 9$

c. $n\leqslant 8$ d. $n\leqslant 9$

Exercice 7210

Dans une exploration forestière, les arbres coupés dans cette forêt sont utilisés pour le chauffage. Le prix d'un stère de bois *(unité de volume mesurant le bois)* augmente chaque année de 3 %.
Au bout de combien d'années le prix d'un stère de bois aura-t-il doublé?

Exercice 7034

On rappelle que $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.

Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation :
$$12\,000-2\,000\times 0{,}75^n\geqslant 11\,950$$

Exercice 7746

On considère la suite (u_n) dont les termes sont définies pour tout entier naturel n par :
$$u_n=700-100\times 0{,}7^n$$

1. Soit n un entier naturel. Démontrer que $u_n\geqslant 697$ est équivalent à $0{,}7^n\leqslant 0{,}03$.
2. Pour résoudre cette inéquation, on utilise l'algorithme suivant :

```
N ← 0
U ← 1
Tant que  U>0,03
    N ←  N+1
    U ←  0,7× U
Fint Tant que
```

   Donner la valeur de la variable N à la fin de l'exécution de cet algorithme.
3. Retrouver ce résultat en résolvant l'inéquation : $0{,}7^n\leqslant 0{,}03$.

9. Résolution d'inéquations et étude de fonctions :
(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 7014

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[3\,;13]$ par :
$f(x) = -2x + 20 - \mathrm{e}^{-2x+10}$

1. Montrer que la fonction dérivée f', de la fonction f, définie pour tout x de l'intervalle $[3\,;13]$, a pour expression :
$f'(x) = 2\cdot\left(-1 + \mathrm{e}^{-2x+10}\right)$

2. a. Résoudre dans l'intervalle $[3\,;13]$ l'inéquation : $f'(x) \geqslant 0$

   b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[3\,;13]$ et dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle. Les valeurs du tableau seront, si besoin, arrondies à 10^{-3}.

10. Résolution d'inéquations et suites :
(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 7700

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par la relation :
$u_n = -17{,}5\times0{,}92^n + 37{,}5$

1. Déterminer les deux premiers termes de cette suite.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. Les termes de la suite (u_n) dépasseront-ils la valeur 30? Si oui, pour quel rang la première fois cette valeur sera-t-elle dépassée?

11. Problèmes :

Exercice 7747

Une entreprise qui produit du papier recyclé, a été créée en l'année 2000 et le tableau ci-dessous donne l'évolution de sa production.

Année	2000	2002	2004	2006	2008	2010	2012
Rang de l'année	0	2	4	6	8	10	12
Production en tonnes	7 000	18 811	36 620	49 000	58 012	63 098	68 500

1. a. Déterminer le pourcentage d'augmentation de la production entre les années 2000 et 2012. On donnera le résultat arrondi sous la forme $a\,\%$ où a est un nombre entier.

   b. Déterminer un nombre réel positif qui est solution de l'équation : $x^{12} = 9{,}79$. Interpréter ce nombre en termes de taux d'évolution de la production de cette entreprise entre les années 2000 et 2012. On donnera le résultat arrondi sous la forme $b\,\%$ où b est un nombre entier.

2. L'entreprise fait appel à une cabinet d'experts pour modéliser l'évolution de la production de l'entreprise afin de faire une projection jusqu'en 2020. Le cabinet d'experts propose la fonction f définie sur l'intervalle $[2\,;20]$ par :
$f(x) = 27\,131\cdot\ln(x) + 0{,}626\cdot x^3$
où x représente le rang de l'année et $f(x)$ le nombre de tonnes produites.

   a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;20]$. Déterminer $f'(x)$ puis les variations de la fonction f sur $[2\,;20]$.

   b. A l'aide de cette modélisation, l'entreprise peut-elle dépasser une production de 90 000 tonnes de papier recyclé avant l'année 2020? Justifier.

