Terminale Option Complémentaire/Annales exponentielles, logarithmes, convexité

1. Etude de fonctions :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 1

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-20\,;20]$ par : $f(x)=(-2x+30)\cdot e^{0,2\cdot x-3}$

1. a. Montrer que $f'(x)=(-0,4x+4)\cdot e^{0,2x-3}$ pour tout réel x de l'intervalle $[-20\,;20]$.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-20\,;20]$.
   On précisera la valeur exacte du maximum de f.
2. a. Montrer que, sur l'intervalle $[-20\,;20]$, l'équation $f(x)=-2$ admet une unique solution α.
   b. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.
3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	Dériver $(-10x+200)e^{0,2x-3}$ $(-2x+30)e^{0,2x-3}$
2	Dériver $(-2x+30)e^{0,2x-3}$ $(-0,4x+4)e^{0,2x-3}$
3	Dériver $(-0,4x+4)e^{0,2x-3}$ $(-0,08x+0,4)e^{0,2x-3}$

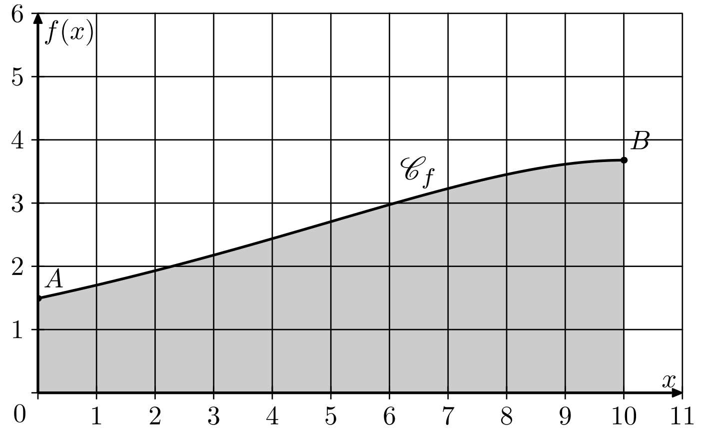
Répondre aux deux questions suivantes en utilisant les résultats donnés par le logiciel :

a. Calculer la valeur exacte de : $\displaystyle\int_{10}^{15} f(x)\,dx$.

b. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe et préciser l'abscisse du point d'inflexion.

Partie B

Une station de ski souhaite ouvrir une nouvelle piste au public. Le relief de cette piste est modélisé ci-dessous par la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie dans la partie A sur l'intervalle $[0\,;10]$. Le point B représente le départ de la nouvelle piste et le point A représente la station de ski où se trouve l'arrivée.



Le réel x représente la distance horizontale, exprimée en km, depuis la station de ski et $f(x)$ représente l'altitude, exprimée en km.

On appelle pente de la piste au point M, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point M. Par exemple, une pente de 15 % en un point de la piste correspond à un coefficient directeur de $\dfrac{15}{100}=0,15$.

1. On appelle dénivelé d'une piste de ski, la différence d'altitude entre le point de départ et le point d'arrivée de cette piste. Calculer le dénivelé de cette nouvelle piste. On arrondira le résultat au mètre.
2. La station de ski doit déterminer la difficulté de cette nouvelle piste en fonction de la pente.
   - La piste sera classée noire, c'est à dire très difficile, si au moins une portion de la piste a une pente supérieure ou égale à 40 %/.
   - La piste sera classée rouge, c'est à dire difficile, si au moins une portion de la piste a une pente strictement comprise entre 25 % et 40 % *(et aucune portion avec une pente supérieure ou égale à 40 %)*.
   - Si toutes les portions de la piste ont une pente inférieure ou égale à 25 % alors la piste sera classée bleue, c'est à dire facile.

   Déterminer le niveau de difficulté de cette nouvelle piste. Justifier la réponse.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par : $f(x)=2x^2\cdot\ln(x)$ sur $[0,2\,;10]$ et on note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère du plan. Le but de cet exercice est de prouver que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet sur $[0,2\,;10]$ une seule tangente passant par l'origine du repère.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Montrer que pour $x\in[0,2\,;10]$: $f'(x)=2x\cdot[2\cdot\ln(x)+1]$
2. Soit a un réel de $[0,2\,;10]$, montrer que la tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse a a pour équation :

$y=2a\cdot\left[2\cdot\ln(a)+1\right]\cdot x-2a^2\cdot\left[\ln(a)+1\right]$.

3. Répondre alors au problème posé.

2. Convexité :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 3

Les deux parties sont liées

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0\,;10\right]$ par :
$$f(x)=\frac{1}{0{,}5+100\cdot e^{-x}}$$
On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $\left[0\,;10\right]$.

1. Montrer que, pour tout réel x dans l'intervalle $\left[0\,;10\right]$, on a :
$$f'(x)=\frac{100\cdot e^{-x}}{\left(0{,}5+100\cdot e^{-x}\right)^2}$$

On note f'' la fonction dérivée seconde de f sur l'intervalle $\left[0\,;10\right]$.
Un logiciel de calcul formel fournit l'expression suivante de $f''(x)$:
$$f''(x)=\frac{100\cdot e^{-x}\cdot\left(100\cdot e^{-x}-0{,}5\right)}{\left(0{,}5+100\cdot e^{-x}\right)^3}$$

2. a. Montrer que, dans l'intervalle $\left[0\,;10\right]$, l'inéquation : $100\cdot e^{-x}-0{,}5\geqslant 0$
est équivalente à l'inéquation : $x\leqslant -\ln\left(0{,}005\right)$.

   b. En déduire le tableau de signes de la fonction f'' sur l'intervalle $\left[0\,;10\right]$.

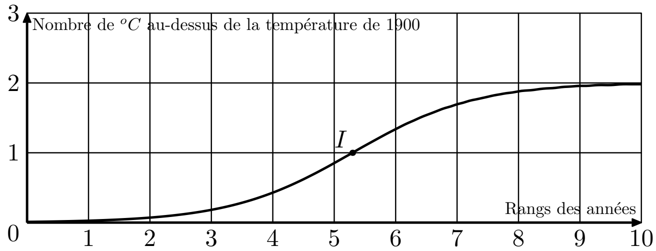
3. On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f tracée dans un repère.
Montrer, à l'aide de la question 2., que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion noté I, dont on précisera la valeur exacte de l'abscisse.

4. En utilisant les résultats de la question 2., déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est concave.

Partie B

Dans toute cette partie les températures seront exprimées en degré Celsius, notés ^oC.

La COP21, conférence sur les changements climatiques des Nations Unies, a adopté le 12 décembre 2015 le premier accord universsel sur le climat, appelé accord de Paris, signé par 195 pays.
Cet accord confirme l'objectif, d'ici l'année 2100, que la température terrestre ne dépasse pas de plus de 2^oC la température de l'année 1900.
Dans cette partie, on modélise, par la fonction f de la partie **A**, une évolution de température possible permettant d'atteindre l'objectif de l'accord de Paris.
La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction est tracée ci-dessous, et I est son point d'inflexion.
Sur l'axe des abscisses, l'année 1900 correspond à 0 et une unité représente 25 ans, donc l'année 1925 correspond à 1.
Sur l'axe des ordonnées, on a représenté le nombre de degrś Celsius au-dessus de la température de 1900.



1. a. Calculer $f(10)$, en arrondissant le résultat au centième.

   b. En déduire qu'en 2150, avec ce modèle, l'objectif de l'accord de Paris sera respecté.

2. a. En utilisant la partie **A**, déterminer l'année correspondant à l'abscisse du point I d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$. Arrondir le résultat à l'unité.

   b. Calculer, pour cette année-là, le nombre de degré Celsius supplémentaires par rapport à 1900.

3. On appelle vitesse du réchauffement climatique la vitesse d'augmentation du nombre de degrés Celsisus. On admet que, à partir de 1900, la vitesse du réchauffement climatique est modélisée par la fonction f'.

   a. Est-il vrai de dire qu'après 2033 la température terrestre diminuera? Justifier la réponse.

   b. Est-il vrai de dire qu'après 2033 la vitesse du réchauffement climatique diminuera? Justifier la réponse.

4. Pour sauvegarder les îles menacées par la montée des eaux, la température terrestre ne doit pas dépasser de plus de $1{,}5\,^oC$ la température de l'année 1900.
Déterminer l'année au cours de laquelle la température terrestre atteindra ce seuil, selon ce modèle.

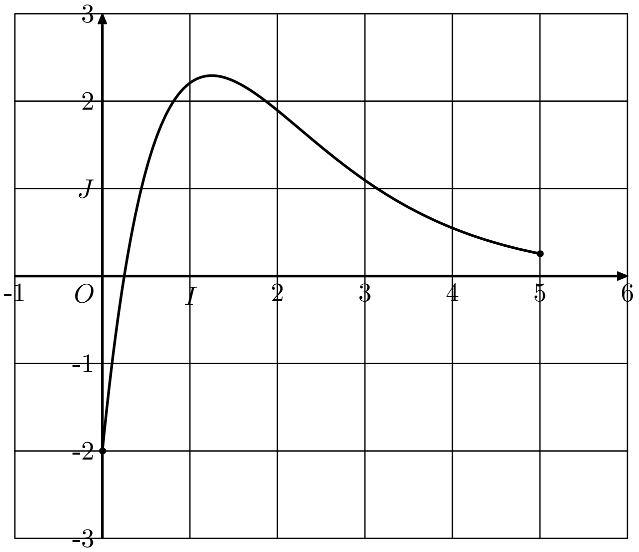
3. Convexité et théorème des valeurs intermédiaires :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 4

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $\left[0\,;5\right]$ par :
$$f(x)=\left(a\cdot x-2\right)\cdot e^{-x}$$
où a est un nombre réel.

On admet dans tout l'exercice que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $\left[0\,;5\right]$.
La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous dans un repère d'origine O.



Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ passent toutes les deux par le point $A(0\,;-2)$.
La droite $\mathcal{D}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A et admet pour équation $y=10x-2$.
On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

1. Donner, à l'aide des informtions ci-dessus et sans justifier les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

2. a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;5]$, on a :
$$f'(x) = \big(-a{\cdot}x+a+2\big){\cdot}\mathrm{e}^{-x}$$
   b. Déduire des questions précédentes que : $a=8$.
   c. Donner l'expression de $f'(x)$.

3. a. Préciser le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;5]$. On pourra faire un tableau.
   b. En déduire le tableau des variations de la fonction f sur cet intervalle.
   c. Résoudre sur l'intervalle $[0\,;5]$ l'équation $f(x)=0$.

4. A l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants :

1	`g(x):=(-8*x+10)*exp(-x)` $\rightarrow g(x) := \big(-8{\cdot}x+10\big){\cdot}\mathrm{e}^{-x}$
2	`Dériver[g(x),x]` $\rightarrow \big(8{\cdot}x-18\big){\cdot}\exp(-x)$
3	`Résoudre[(8*x-18)*exp(-x)>0,x]` $\rightarrow x > \dfrac{9}{4}$

En utilisant ces résultats :
   a. Donner l'expression de f'', fonction dérivée seconde de la fonction f.
   b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion dont on donnera la valeur exacte de l'abscisse.

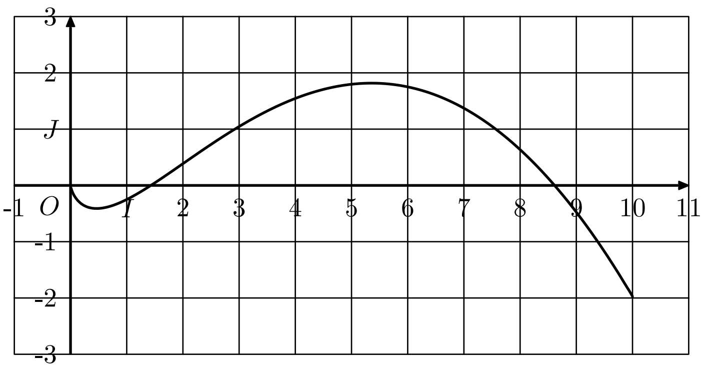
5. Une entreprise fabrique des grille-pains. Après avor fait une étude, son directeur constate que si l'entreprise fabrique chaque jour x milliers de grille-pains *(où x est un nombre réel de l'intervalle $[0\,;5]$)*, alors le bénéfice quotidien est donné, en centaine de milliers d'euros, par la fonction f définie par :
$$f(x) = \big(8{\cdot}x-2\big){\cdot}\mathrm{e}^{-x}$$
   a. Quelle quantité de grille-pains l'entreprise doit-elle fabriquer afin de réaliser un bénéfice maximal?
   b. Quel est alors la valeur de ce bénéfice maximal?
   On donnera une valeur approchée du résultat à l'euro près.

4. Qcm :

Exercice 5

Cet exercice est un QCM *(questionnaire à choix multiples)*. Pour chacune des questions proposées, une seule des trois réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte.
Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;10[$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous dans un repère d'origine O.



On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

1. Le nombre de solutions sur l'intervalle $]0\,;10]$ de l'équation $f'(x)=0$ est égal à :

   a. 1   b. 2   c. 3

2. Le nombre réel $f'(7)$ est :

   a. nul   b. strictement positif

   c. strictement négatif

3. La fonction f' est :

a. croissante sur $]0\,;10]$ b. croissante sur $[4\,;7]$

c. décroissante sur $[4\,;7]$

4. On admet que pour tout x de l'intervalle $]0\,;10]$, on a :
$f'(x)=\ln(x)-\dfrac{x}{2}+1$
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet sur cet intervalle un point d'inflexion :

a. d'abscisse 2,1 b. d'abscisse 0,9

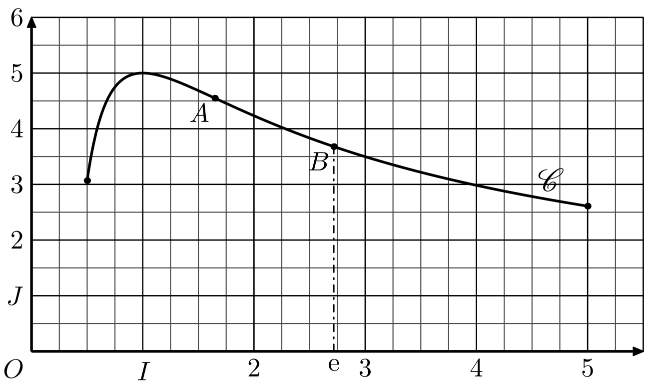
c. d'abscisse 2

Exercice 6

Cet exercice est un QCM *(questionnaire à choix multiples)*. Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapport 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapport ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0{,}5\,;5]$ par :
$f(x)=\dfrac{5+5\cdot\ln x}{x}$

Sa représentation graphique est la courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous dans un repère d'origine O .



On admet que le point A placé sur le graphique est le seul point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0{,}5\,;5]$.
On note B le point de cette courbe d'abscisse e.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur cet intervalle.
On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f et f'' sa fonction dérivée seconde.

On admet que pour tout x de l'intervalle $[0{,}5\,;5]$, on a :
$f'(x)=\dfrac{-5\cdot\ln x}{x^2}\quad;\quad f''(x)=\dfrac{10\cdot\ln x-5}{x^3}$

1. La fonction f' est :

a. positive ou nulle sur l'intervalle $[0{,}5\,;5]$;

b. négative ou nulle sur l'intervalle $[1\,;5]$;

c. négative ou nulle sur l'intervalle $[0{,}5\,;1]$.

2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B est égale à :

a. $-\dfrac{5}{\mathrm{e}^2}$ b. $\dfrac{10}{\mathrm{e}}$ c. $\dfrac{5}{\mathrm{e}^3}$

3. La fonction f' est :

a. croissante sur l'intervalle $[0{,}5\,;1]$

b. décroissante sur l'intervalle $[1\,;5]$

c. croissante sur l'intervalle $[2\,;5]$

4. La valeur exacte de l'abscisse du point A de la courbe $\mathscr{C}$ est égale à :

a. 1,65 b. 1,6 c. $\mathrm{e}^{0{,}5}$

5. On note $\mathcal{A}$ l'aire, mesurée en unités d'aire, du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=4$. Cette aire vérifie :

a. $20\leqslant\mathcal{A}\leqslant 30$ b. $10\leqslant\mathcal{A}\leqslant 15$ c. $5\leqslant\mathcal{A}\leqslant 8$

5. Fonctions et probabilités :

Exercice 7

Dans cet exercice, on considère le premier chiffre des entiers naturels non nuls, en écriture décimale. Par exemple, le premier chiffre de 2017 est 2 et le premier chiffre de 95 est 9.
Dans certaines circonstances, le premier chiffre d'un nombre aléatoire non nul peut être modélisé par une variable aléatoire $\mathcal{X}$ telle que pour tout entier c compris entre 1 et 9 :
$\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}c)=\dfrac{\ln(c{+}1)-\ln(c)}{\ln(10)}$

Cette loi est appelée loi de Benford.

1. Que vaut $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}1)$?

2. On souhaite examiner si la loi de Benford est un modèle valide dans deux cas particuliers.

a. **Premier cas**
Un fichier statistique de l'INSEE indique la population des communes en France au 1er janvier 2016 *(champ : France métropolitaine et département d'outre-mer de la Guadeloupe, de la Guyane, de la Martinique et de la Réunion).*
A partir de ce fichier, on constate qu'il y a 36 677 communes habitées. Parmi elles, il y a 11 094 communes dont la population est un nombre qui commence par le chiffre 1.
Cette observation vous semble-t-elle compatible avec l'affirmation : "*le premier chiffre de la population des communes en France au* 1er *janvier* 2016 *suit la loi de Benford*" ?

b. **Deuxième cas**
Pour chaque candidat au baccalauréat de la session 2017, on considère sa taille en centimètres.
On désigne par $\mathcal{X}$ la variable aléatoire égale au premier chiffre de la taille en centimètres d'un candidat pris au hasard.
La loi de Benford vous semble-t-elle une loi adaptée pour $\mathcal{X}$?