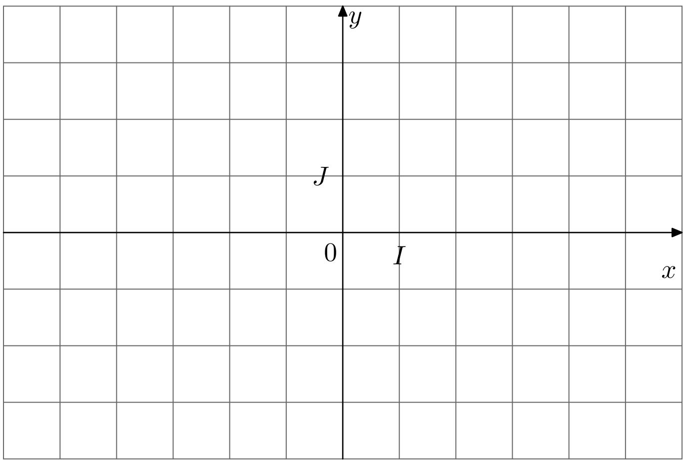
Hors programme lycée/Valeurs absolues

2. Fonctions affines par morceaux :
(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 1

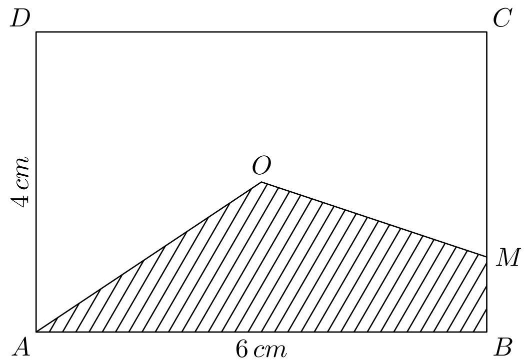
Tracer dans le repère ci-dessous la courbe représentative de la fonction suivante :

$$f :\begin{cases} f(x) = 2x+8 & \text{si } x\in[-5\,;-2] \\ f(x) = -0.5x+3 & \text{si } x\in]-2\,;2] \\ f(x) = -2x+6 & \text{si } x\in]2\,;4] \end{cases}$$



Exercice 2

Dans le plan, on considère le rectangle $ABCD$ de longueur $5\,cm$ et de largeur $3\,cm$. Un point M parcourt le contour de ce rectangle ; on repère ce point par le nombre x représentant la distance parcourue par ce point en partant de A et en parcourant le rectangle dans le sens direct.



On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire de la partie hachurée lorsque M est repéré par le nombre x.

1. Justifier que la fonction $\mathcal{A}$ est une fonction affine par morceaux en fonction de x définie par le système :

$$\begin{cases} x & \text{pour } x\in[0\,;6] \\ \dfrac{3}{2}x-3 & \text{pour } x\in[6\,;10] \\ x+2 & \text{pour } x\in[10\,;16] \\ \dfrac{3}{2}\cdot x-6 & \text{pour } x\in[16\,;20] \end{cases}$$

2. Déterminer la valeur de x pour laquelle on a :
$\mathcal{A}(x) = 20\,cm^2$

4. Valeur absolue - équation :
(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 3

1. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x+1$							
$2{\cdot}x-1$							

2. Parmi les valeurs étudiées dans la question précédente, existe-t-il des solutions de l'équation :
$\left|x+1\right| = \left|2x-1\right|$

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes :

a. $\left|2-x\right| = 2{,}5$ b. $\left|x+100\right| = 1$

c. $3\times\left|x+2\right| = 1$ d. $\left|2-x\right|\times 2 = 1$

e. $3\times\left|x+5\right|+3 = 9$ f. $2\times\left|2-x\right|+4 = 1$

Exercice 5

Résoudre les équations suivantes :

a. $\left|2x-1\right| = \left|-x+1\right|$ b. $\left|3x-1\right| = \left|3x+1\right|$

c. $\left|x-2\right| = 5$ d. $\left|x+2\right| = 6$

Exercice 6

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :
$f(x) = x - \left|2{\cdot}x-1\right|$; $g(x) = x-2$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ respectivement les courbes représentatives des fonctions f et g.

1. A l'aide de la calculatrice, déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2. a. Etablir l'équivalence :
$f(x){=}g(x) \iff \left|2{\cdot}x-1\right|{=}\left|2\right|$

b. En déduire les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

5. Valeur absolue - un peu plus loin : *(+2 exercices pour les enseignants)*

Exercice 7

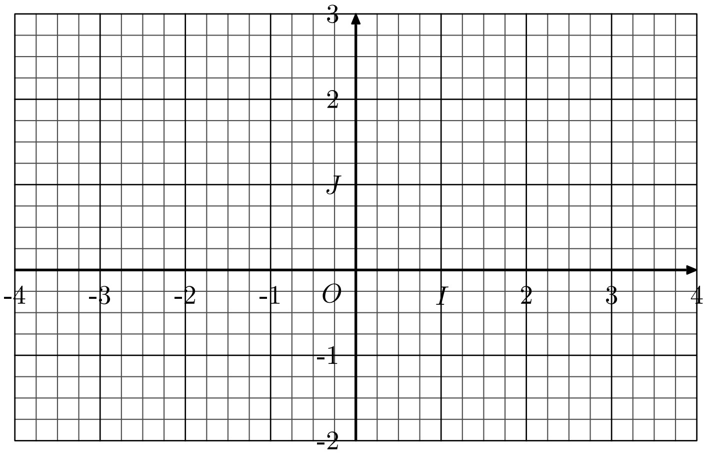
Résoudre les équations suivantes :

a. $|x+3| - |2x+1| = 2$ b. $|x| + 3\cdot|4x-1| = x+1$

Exercice 8

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = |x+2|$; $g(x) = |x| - 1$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives respectives des fonctions f et g :



1. a. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère ci-dessus.
   b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant 1$.
2. a. Tracer la courbe $\mathscr{C}_g$ dans le repère ci-dessus.
   b. Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) \leqslant 0$.

Exercice 9

On considère l'équation (E) définie par :
(E) : $|x+1| + |x-1| \leqslant 5$

On considère les trois intervalles suivants :
$I =]-\infty\,;-1]$; $J = [-1\,;1]$; $K = [1\,;+\infty[$

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $f : x \longmapsto |x+1| + |x-1|$

   Simplifier l'expression de la fonction f sur chacun des trois intervalles I, J et K.
2. a. Résoudre l'inéquation (E) sur chacun des trois intervalles I, J et K.
   b. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E).

6. Valeur absolue - étude de fonctions H : *(+2 exercices pour les enseignants)*

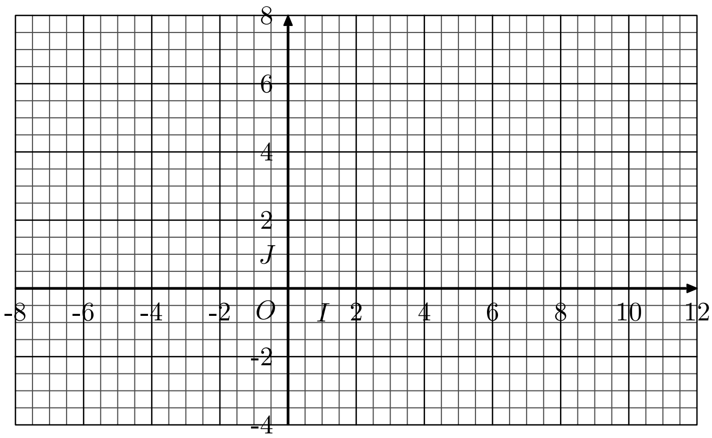
Exercice 10

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -\frac{1}{4}\cdot|x+2| + \frac{3}{4}\cdot|x-4|$$

1. a. Simplifier chaque expression en fonction de l'intervalle étudié :

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$
$\lvert x+2\rvert$				
$\lvert x-4\rvert$				

   b. Donner l'expression simplifiée de la fonction f sur chacun des trois intervalles suivants :
   $I =]-\infty\,;-2]$; $J = [-2\,;4]$; $K = [4\,;+\infty[$
2. On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé donné ci-dessous :



3. D'après la représentation graphique, tracer le tableau de variations de la fonction f.

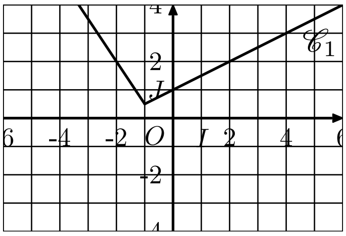
Exercice 11

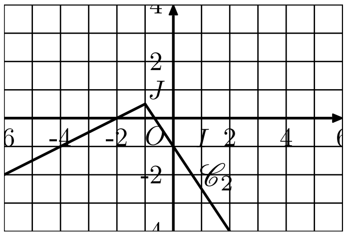
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$$f(x) = |x+1| - \frac{1}{2}\cdot x$$

1. Simplifier l'écriture des expressions algébriques sur les intervalles $]-\infty\,;-1]$ et $[-1\,;+\infty[$ dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\lvert x+1\rvert$			
$f(x)$			

2. Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, sont les deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. Laquelle de ces deux courbes est la représentation de la fonction f :





Exercice 12

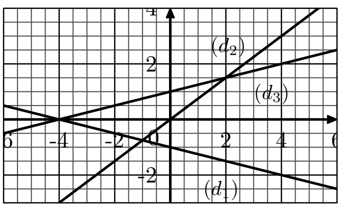
On considère la fonction f définie par la relation :

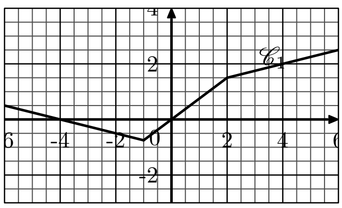
$$f(x) = \left|\frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{2}\right| - \left|\frac{1}{4}\cdot x - \frac{1}{2}\right|$$

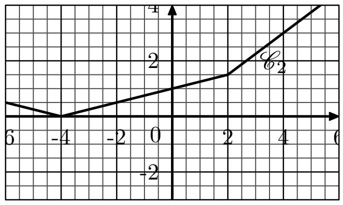
1. Simplifier les expressions algébriques sur les trois intervalles $]-\infty\,;-1]$, $[-1\,;2]$ et $[2\,;+\infty[$ dans le tableau ci-dessous :

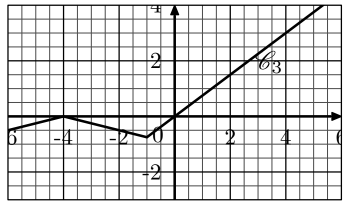
x	$-\infty$ $\quad$ -1	-1 $\quad$ 2	2 $\quad$ $+\infty$
$\left\lvert\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}\right\rvert$			
$\left\lvert\frac{1}{4}\cdot x-\frac{1}{2}\right\rvert$			
$f(x)$			

2. Dans un repère orthonormé, des courbes sont représentées ci-dessous :









a. Par lecture graphique et sans justification, donner les équations réduites des droites (d_1), (d_2) et (d_3).

b. Parmi les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$, quelle est la représentation de la fonction f?

Exercice 13

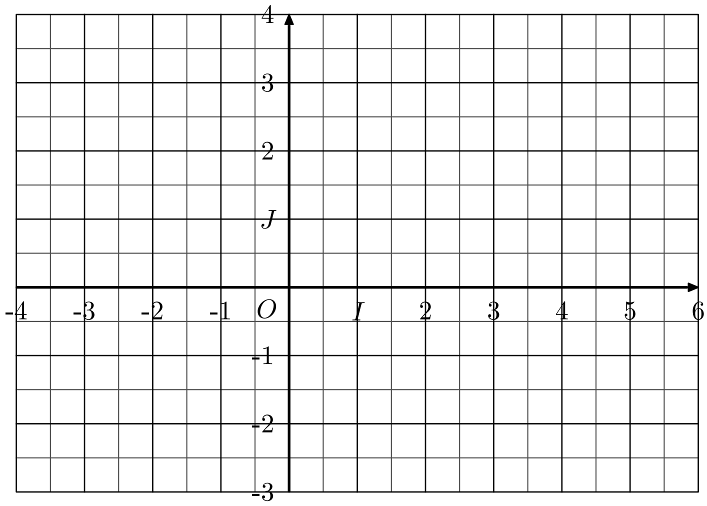
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x) = \left|\frac{3}{4}\cdot x - \frac{3}{2}\right| - \left|\frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{2}\right|$$

1. Déterminer l'image de -4 et de 0 par la fonction f.

2. Simplifier l'expression de la fonction f sur chacun des trois intervalles ci-dessous :
   $I =]-\infty\,;-1]$; $J = [-1\,;2]$; $K = [2\,;+\infty[$

3. On munit le plan du repère $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous. Effectuer dans ce repère le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.



4. a. Graphiquement et sans justification, donner l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = -1$.

   b. Algébriquement, justifier que l'équation $f(x) = -1$ n'admet aucune solution sur l'intervalle $]-\infty\,;-1[$.

7. Un peu plus loin - propriétés algébriques de la valeur absolue :

Exercice 14

On souhaite établir l'égalité suivante pour tous nombres réels x et y :

$$|x \times y| = |x| \times |y|$$

Pour cela, on raisonne par disjonction de cas sur la valeur de x et sur la valeur de y. Etablir cette relation dans chacun des cas suivant :

a. $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_+$ $\qquad$ b. $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_-$

c. $x \in \mathbb{R}_-$ et $y \in \mathbb{R}_+$ $\qquad$ d. $x \in \mathbb{R}_-$ et $y \in \mathbb{R}_-$

Exercice 15

1. Pour tout nombres réels x et y, établir l'inégalité :
   $$|x+y|^2 \leqslant \big(|x| + |y|\big)^2$$

2. En déduire, pour tout réels x et y, la comparaison suivante :
   $$|x+y| \leqslant |x| + |y|$$

9. Exercices non-classés :

(+5 exercices pour les enseignants)

Exercice 16

Traduire les équations ou inéquations suivantes en termes de distance, puis les résoudre :

a. $|x-2| = 1{,}5$ b. $|x+1| = 1$ c. $|2x-1| = 3$

d. $|x-3| \leqslant 2$ e. $|x+4| \leqslant 1$ f. $|x-3| \geqslant 1$