Hors programme lycée/Suites

1. Suites quelconques :

(+4 exercices pour les enseignants)

Exercice 7716

Pour chaque question, déterminer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

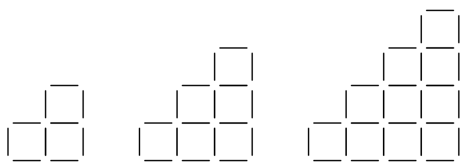
a. $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ b. $u_{n+1} = 2{\cdot}u_n - 2$; $u_0 = 3$

c. $u_n = \sqrt{n^2+n+1}$ d. $u_{n+1} = 2{\cdot}u_n - 2$; $u_0 = 1$

e. $u_n = \dfrac{n-2}{n+1}$ f. $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$; $u_0 = 2$

Exercice 7498

On construit les figures ci-dessous à l'aide de petites baguettes de bois.



1$^{\text{er}}$ étape 2$^{\text{e}}$ étape 3$^{\text{e}}$ étape

Pour n un entier strictement positif $(n\in\mathbb{N}^*)$, on note u_n le nombre de baguettes nécessaires à la construction lors de l'étape n. On a donc :

$$u_1 = 10 \quad ; \quad u_2 = \dots \quad ; \quad u_3 = \dots \quad ; \quad u_4 = \dots$$

Exercice 7598

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n positif ou nul $(n\in\mathbb{N})$ par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + \frac{n}{n+1}$$

Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n).

Exercice 4557

1. Voici des exemples de suites de nombres :

   a. $(\ 2 \ ; \ 5 \ ; \ 8 \ ; \ 11 \ ; \ 14 \ ; \ \dots\ )$

   b. $(\ 2 \ ; \ 6 \ ; \ 18 \ ; \ 54 \ ; \ 162 \ ; \ \dots\ )$

   c. $(\ 6 \ ; \ -6 \ ; \ 6 \ ; \ -6 \ ; \ 6 \ ; \ \dots\ )$

   d. $(\ 1 \ ; \ 3 \ ; \ 7 \ ; \ 15 \ ; \ 31 \ ; \ \dots\ )$

   Pour chacune de ces suites des nombres; trouver la relation qui permet d'obtenir une valeur en fonction des valeurs précédentes.

2. Voici d'autres exemples de suites numériques :

   a. $(\ 0 \ ; \ 2 \ ; \ 4 \ ; \ 6 \ ; \ 8 \ ; \ \dots\ )$

   b. $(\ 1 \ ; \ 6 \ ; \ 11 \ ; \ 16 \ ; \ 21 \ ; \ \dots\ )$

   c. $(\ 1 \ ; \ 2 \ ; \ 4 \ ; \ 8 \ ; \ 16 \ ; \ 32 \ ; \ \dots\ )$

   d. $(\ 1 \ ; \ \sqrt{2} \ ; \ \sqrt{3} \ ; \ 2 \ ; \ \sqrt{5} \ ; \ \sqrt{6} \ ; \ \dots\ )$

   e. $\left(\ 2 \ ; \ \dfrac{3}{2} \ ; \ \dfrac{4}{3} \ ; \ \dfrac{5}{4} \ ; \ \dfrac{6}{5} \ ; \ \dots\ \right)$

   Pour chacune de ces suites des nombres trouver la relation qui permet d'obtenir une valeur en fonction de sa position dans la suite.

Exercice 4559

On considère les suites définies ci-dessous par la valeur de leur premier terme et d'une relation de récurrence où l'entier n désigne un entier positif ou nul $(n\in\mathbb{N})$:

a. $u_0 = 5$; $u_{n+1} = u_n + 2$ b. $v_0 = 3$; $v_{n+1} = 2{\cdot}v_n$

c. $w_0 = 2$; $w_{n+1} = -w_n$ d. $x_0 = 4$; $x_{n+1} = 2{\cdot}x_n - 2$

d. $y_0 = 1$; $y_1 = 1$; $y_{n+1} = y_n + y_{n-1}$

Déterminer les cinq premiers termes de chacune de ces suites.

Exercice 7539

On considère les deux algorithmes ci-dessous :

Algorithme 1

```
u ← 4
Pour i allant de 1 à
53
    u ← u+3
Fin Pour
```

Algorithme 2

```
u ← 1
Pour i allant de 1 à
4
    u ← 2× u+1
Fin Pour
```

Pour chacun des algorithmes, donner la valeur contenue dans la variable **u** après l'exécution de l'algorithme.

Exercice 7591

1. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n) définie pour tout entier positif ou nul $(n\in\mathbb{N})$:
   $u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = 2{\cdot}u_n - 2$

2. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (v_n) définie pour tout entier positif ou nul $(n\in\mathbb{N})$:
   $v_n = \dfrac{n+1}{2{\cdot}n+1}$

Exercice 7597

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n positif ou nul $(n\in\mathbb{N})$ par :

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = 2{\cdot}u_n + \frac{1}{n+1}$$

Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n).

Exercice 7592

1. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n) définie pour tout entier positif ou nul $(n\in\mathbb{N})$:
   $u_0 = 4 \quad ; \quad u_{n+1} = 3 - 2{\cdot}u_n$

2. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (v_n) définie pour tout entier positif ou nul $(n\in\mathbb{N})$:
   $v_n = \dfrac{2{\cdot}n-1}{n+3}$

Exercice 4558

On considère les suites numériques définies ci-dessous, où leur rang n est un entier positif ou nul $(n \in \mathbb{N})$:

a. $u_n = 2n$ b. $v_n = 3n - 4$

c. $w_n = n^2 + 3$ d. $x_n = 2^n$

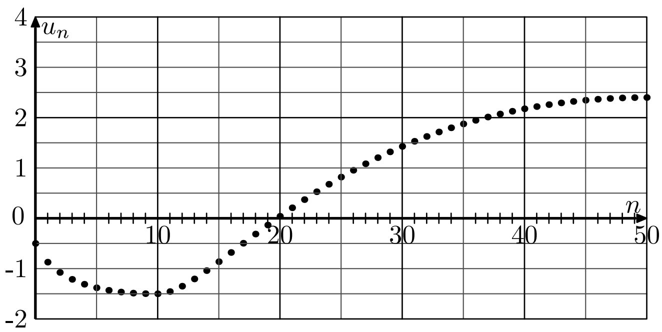
Déterminer les cinq premiers termes de chacune de ces suites.

2. Suites quelconques et lecture graphique :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 7750

On considère une suite (u_n) définie pour tout entier naturel n positif ou nul $(n \in \mathbb{N})$. Dans un repère sont représentés les points de coordonnées $(n\,;u_n)$ pour n compris entre 0 et 50 :



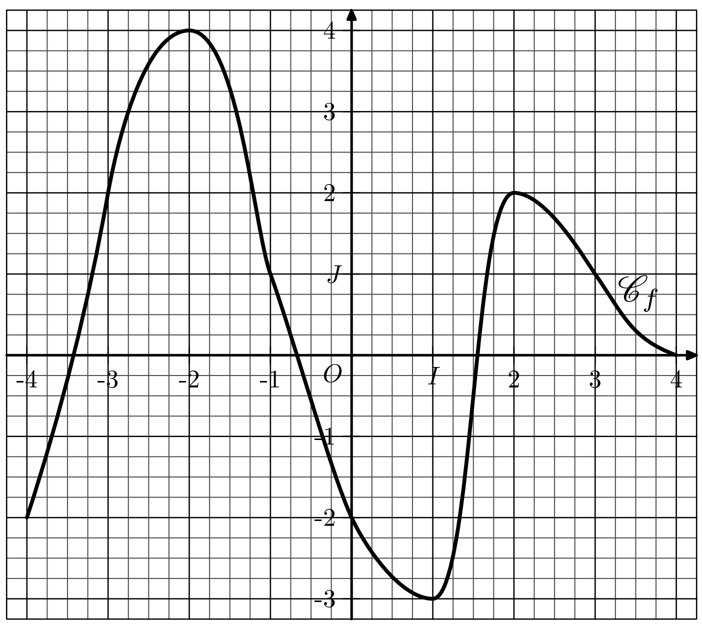
1. Donner les valeurs exactes de u_0 et u_{10}.

2. Donner des valeurs approchées de u_5, u_{30} et u_{40}.

3. Que peut-on dire des valeurs des termes u_n lorsque la valeur de n augmente?

Exercice 4584

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on considère la représentation $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$:



On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les relations :

$u_{n+1} = f(u_n)$; $v_{n+1} = f(v_n)$

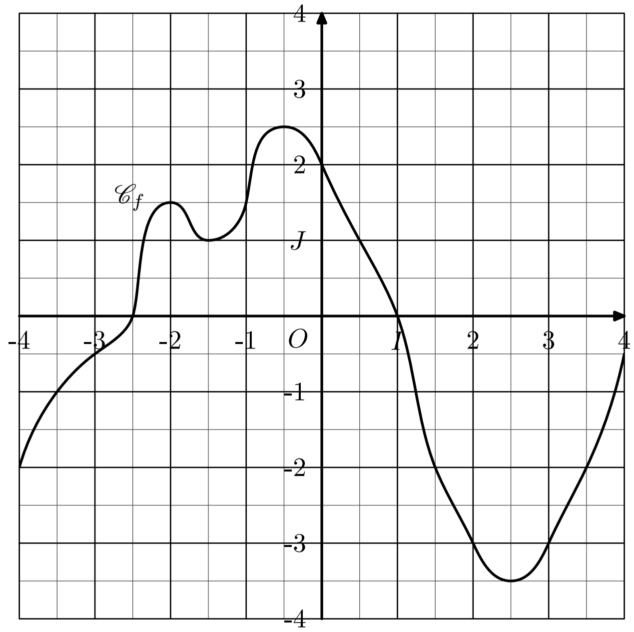
vérifiant les conditions initiales suivantes :

$u_0 = -1$; $v_0 = -4$

Déterminer les 100 premiers termes de chacune de ces deux suites.

Exercice 4583

On considère la fonction f définie sur $[-4\,;4]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous :



On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que le terme u_1 est égal à -3.

2. Justifier les égalités suivantes :

   a. $u_2 = -0{,}5$ b. $u_3 = 2{,}5$

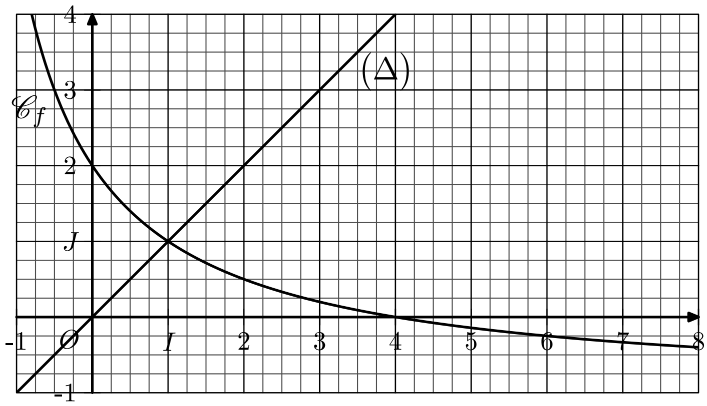
3. Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n										

Exercice 4609

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dont l'image d'un nombre x est défini par :

$$f(x) = \frac{-x+4}{x+2}$$



La droite (Δ) est la première bissectrice du plan.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :
$u_{n+1} = f(u_n)$; $u_0 = 8$

1. Sur l'axe des abscisses, présenter les valeurs des six premiers termes de la suite.
2. Déterminer, par le calcul, les trois premiers termes de la suite (u_n).

3. Somme de termes :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 7724

1. On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme 4 et de raison $\frac{2}{3}$
   a. Déterminer les trois premiers termes de la suite (u_n).
   b. Déterminer le rang de la suite (u_n) ayant pour valeur 38.
   c. Déterminer la somme des termes :
   $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{99}$.
2. On considère la suite géométrique (v_n) de premier terme 4 et de raison $\frac{2}{3}$
   a. Déterminer les trois premiers termes de la suite (v_n).
   b. Déterminer la somme des termes :
   $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{15}$.

Exercice 7798

1. On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $\frac{1}{3}$ et de raison $\frac{1}{2}$
   a. Déterminer les trois premiers termes de la suite (u_n).
   b. Déterminer le rang du terme u_n ayant pour valeur $\frac{77}{6}$.
   c. Déterminer la somme des termes :
   $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{99}$.
2. On considère la suite géométrique (v_n) de premier terme $\frac{1}{3}$ et de raison $\frac{1}{2}$
   a. Déterminer les trois premiers termes de la suite (v_n).
   b. Déterminer la somme des termes :
   $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{15}$.

Exercice 6547

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique de premier terme 5 et de raison 3.
   Déterminer la valeur de la somme S des 100 premiers termes de cette suite.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de premier terme 3 et de raison $\frac{1}{4}$.
   Déterminer la valeur de la somme S' des 100 permiers termes de cette suite.

Exercice 5172

On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 0$; $u_{n+1} = -\frac{1}{2}\cdot u_n + 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n).
2. On considère la suite (v_n) définie par :
   $v_n = u_n - \frac{2}{3}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
   a. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (v_n).
   b. Etablir que pour tout entier naturel n, on a :
   $v_{n+1} = -\frac{1}{2}\cdot v_n$
   c. Donner la nature et les valeurs des éléments caractéristiques de la suite (v_n).
3. a. Déterminer la valeur de la somme S' définie par :
   $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{14}$
   b. Déterminer la valeur de la somme S définie par :
   $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{14}$
4. a. Donner l'expression du terme v_n en fonction de son rang n.
   b. Donner l'expression du terme u_n en fonction de son rang n.

Exercice 7607

1. On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme 2 et de raison 3.
   Déterminer la somme des 10 premiers termes de la suite (u_n).
2. On considère la suite (v_n) géométrique de premier terme 5 et de raison $\frac{1}{2}$.
   Déterminer une expression de la somme S définie par :
   $S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{12}$
   Donner la valeur approchée de S au centième près.

Exercice 8471

Les termes de chaque somme sont les termes d'une suite géométrique. Déterminer la valeur de ces deux sommes :

1. $S_1 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots + \dfrac{1}{1024}$

2. $S_2 = 2 + \sqrt{3} + \dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{4} + \dfrac{9}{8}$

Exercice 8467

On considère la somme S définie par :

$$S = 5 + 2 - 1 - 4 - \cdots - 37$$

En déduire la valeur de S.

Exercice 7663

On considère la somme S définie par :

$$S = 1 + \frac{5}{2} + 4 + \frac{11}{2} + \cdots + 100$$

On admet que les termes de la somme S sont les premiers termes successifs d'une suite (u_n) arithmétique définie sur $\mathbb{N}$.

1. Donner les éléments caractéristiques de la suite (u_n) et déterminer le rang du terme de la suite ayant 100 pour valeur.

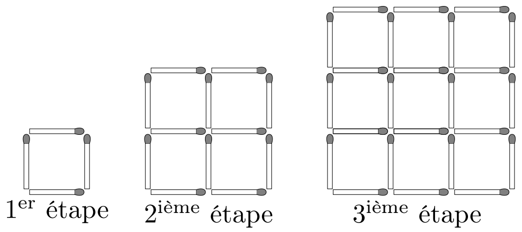
2. En déduire la valeur de la somme S.

6. Rappes sur les suites :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 6144

On considère les constructions suivantes :



On note (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}^*$ où u_n représente le nombre d'allumettes nécessaire à la construction de la $n^{\text{ième}}$ étape.

Parmi les définitions proposées ci-dessous, laquelle permet de définir la suite (u_n) présentée ci-dessus :

a. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 4\cdot u_n \end{cases}$

b. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + 4\cdot n \end{cases}$

c. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + 4\cdot(n+1) \end{cases}$

d. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 4\cdot u_n + n \end{cases}$

Exercice 6125

On considère les suites numériques, ci-dessous, définies sur $\mathbb{N}$ par récurrence : c'est à dire en fonction de leur valeur initiale et d'une relation avec les termes précédents.

1. $u_0 = 5$; $u_{n+1} = u_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. $v_0 = 3$; $v_{n+1} = 2\cdot v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. $w_0 = 2$; $w_{n+1} = -w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. $x_0 = 4$; $x_{n+1} = 2\cdot x_n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

5. $x_0 = 1$; $x_1 = 1$; $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Déterminer les cinq premiers termes de chacune de ces suites.

255. Exercices non-classés :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 4644

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n - 2n + 11$$

1. a. A l'aide du logiciel de votre choix, tracer le nuage de points associé au 15 premiers termes de cette suite.

   b. Faire une conjecture quant à la nature de la courbe passant par ces points.

2. a. Déterminer la fonction f définie par un polynôme du second degré, vérifiant les relations :
   $u_0 = f(0)$; $u_1 = f(1)$; $u_{11} = f(11)$

   b. Donner l'expression réduite de l'expression :
   $f(x+1) - f(x)$.

   c. Etablir l'expression des termes de la suite (u_n) en fonction de leur rang n.

Exercice 6635

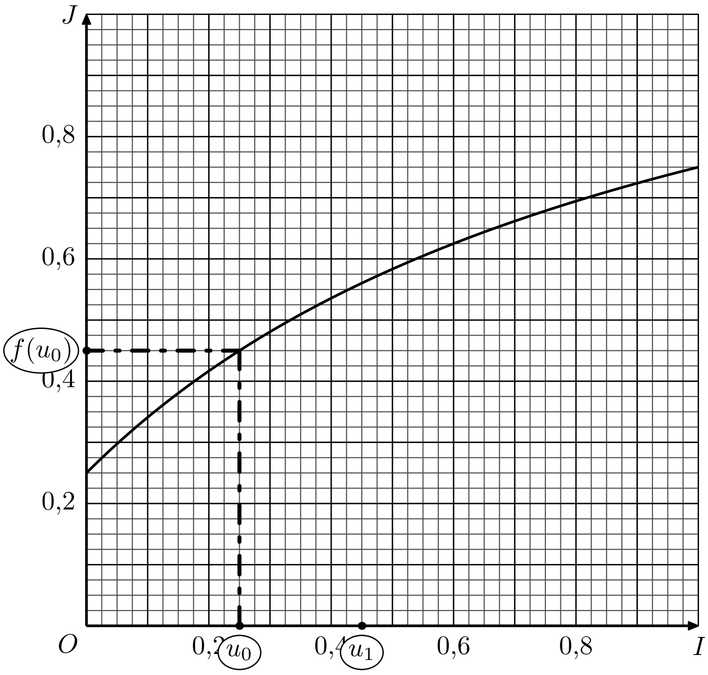
On considère la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par la relation :

$$f(x) = \frac{5}{4} - \frac{1}{x+1}$$

1. a. Etablir les valeurs suivantes :
   $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{9}{20}$; $(f \circ f)\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{65}{116}$

   b. Déterminer la valeur de : $(f \circ f \circ f)\left(\dfrac{1}{4}\right)$

Ci-dessous est donnée la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



2. a. Donner les valeurs approchées au millième près des nombres suivants :
   - $u_0 = \dfrac{1}{4} = \ldots\ldots$
   - $u_1 = \dfrac{9}{20} \approx \ldots\ldots$
   - $u_2 = \dfrac{65}{116} \approx \ldots\ldots$
   - $u_3 = \dfrac{441}{724} \approx \ldots\ldots$

   b. Placer les valeurs u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.

   c. Placer les valeurs $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ sur l'axe des ordonnées.

3. a. Tracer le segment reliant les deux points $A_1(u_1\,;0)$ et $B_1\big(0\,;f(u_0)\big)$.
   Quelle est la nature du triangle OA_1B_1.

   b. Pour i allant de 1 à 3, on définit les points :
   $A_i(u_i\,;0)$ et $B_i\big(0\,;f\big(u_{i-1}\big)\big)$
   De quelles natures sont les triangles OA_iB_i?

   c. Placer les nombres u_4 et u_5 sur l'axe des abscisses définis par les relations :
   $f(u_3) = u_4 \quad ; \quad f(u_4) = u_5$

4. *Génération des termes de la suite :*

   a. Saisir et exécuter ce programme dans le langage de programmation de votre choix.

```
x ← 0,25
Pour i allant de 0 à 100
     x ← 5/4 − 1/(x+1)
Fin Pour
```

   En fin d'exécution, quelle est la valeur de la variable x?

   b. Quelle conjecture peut-on faire sur les termes de cette suite?

Exercice 5107

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 5 \quad ; \quad u_n = \Big(1+\frac{2}{n}\Big)\cdot u_{n-1} + \frac{6}{n} \quad \text{pour } n\in\mathbb{N}^*$$

1. a. Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n							

   b. Faire une conjecture sur la nature de la suite (d_n) définie par :
   $d_n = u_{n+1} - u_n$

2. On considère la suite (v_n) définie par :
   $v_n = 4n^2 + 12n + 5$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

   a. Donner l'expression simplifiée de l'expression v_{n+1} en fonction de n.

   b. Simplifier l'expression de : $\Big(1+\dfrac{2}{n+1}\Big)\cdot v_n + \dfrac{6}{n+1}$.
   (On utilisera la factorisation :
   $4x^3 + 24x^2 + 41x + 21 = (x+1)(4x^2+20x+21)$*)*

   c. Que peut-on dire des suites (u_n) et (v_n).

