# Hors programme lycée/Similitudes

## 1. Transformation et complexe : 

*(+2 exercices pour les enseignants)*

### Exercice 3933

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j})$.

On considère le point $M$ du plan d'affixe $z$. Pour chaque question, on associe au point $M$ un point $M'$ dont l'affixe $z'$ est définie en fonction de $z$.

Déterminer la nature et les caractéristiques de chacune de ces applications :

a. $z' = z - 1 + 2{\cdot}\mathrm{i}$

b. $z' = 2{\cdot}z + 3 - 2{\cdot}\mathrm{i}$

c. $z' = \Big(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}{\cdot}i\Big){\cdot}z + 1 + \mathrm{i}$

### Exercice 3941

Dans le complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$, on considère la similitude directe $f$ d'écriture complexe :

$$z \longmapsto \frac{3}{2}{\cdot}(1-\mathrm{i}){\cdot}z + 4 - 2{\cdot}\mathrm{i}$$

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner un démonstration de la réponse choisie :

$f = r \circ h$ où $h$ est l'homothétie de rapport $3{\cdot}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et de centre le point $\Omega$ d'affixe $-2-2{\cdot}\mathrm{i}$ et où $r$ est la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

### Exercice 4028

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$. On désigne par $m$ un nombre réel. On considère la transfromation $T_m$ du plan dans lui-même qui, à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par :

$$z' = (m+\mathrm{i}){\cdot}z + m - 1 - \mathrm{i}$$

1. Peut-on choisir $m$ de telle sorte que $T_m$ soit une translation?
2. Déterminer le réel $m$ de telle sorte que $T_m$ soit une rotation. Préciser alors le centre et l'angle de cette rotation.

## 2. Similitude directe : 

*(+3 exercices pour les enseignants)*

### Exercice 3970

Le plan complexe est muni d'un repère $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$ orthonormé direct d'unité graphique $1\,cm$, on considère les points $A$, $B$, $C$, $M$, $N$ et $P$ d'affixes respectives :

$$a = 1+\mathrm{i} \quad ; \quad b = -1+2{\cdot}i\text{ß} \quad ; \quad c = 2+3{\cdot}\mathrm{i}$$
$$m = 7-5{\cdot}\mathrm{i} \quad ; \quad n = 5-\mathrm{i} \quad ; \quad p = 9+\mathrm{i}$$

1. a. Placer les points $A$, $B$, $C$, $M$, $N$ et $P$ dans le repère.
   b. Calculer les longueurs des côtés des triangles $ABC$ et $NMP$.
   c. En déduire que ces deux triangles sont semblables.

*Dans la suite de l'exercice, on se propose de mettre en évidence la similitude directe qui transforme le triangle $ABC$ en le triangle $MNP$.*

2. Soit $s$ la similitude directe qui transforme le point $A$ en $N$ et le point $B$ en $P$.
   a. Montrer qu'une écriture complexe de la similitude $s$ est :
   $$z' = \Big(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}{\cdot}\mathrm{i}\Big){\cdot}z + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}{\cdot}\mathrm{i}$$
   b. Déterminer le rapport, la valeur de l'angle arrondie au degré, ainsi que le centre de la similitude $s$.
   c. Vérifier que la similitude $s$ transforme le point $C$ en $M$.

### Exercice 3972

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$ d'unité $1\,cm$.

1. Soient les points $C$ et $D$ d'affixes respectives $c{=}3$ et $d{=}1{-}3{\cdot}\mathrm{i}$, et $\mathcal{S}_1$ la similitude qui à tout point $M$ du plan associe le point $M_1$ symétrique de $M$ par rapport à l'axe $(O\,;\,\overrightarrow{u})$ des réels.
   a. Placer les points $C$ et $D$ puis leurs images respectives $C_1$ et $D_1$ par $\mathcal{S}_1$. On complétera la figure au fur et à mesure de l'exercice.
   b. Donner l'expression complexe de $\mathcal{S}_1$.
2. Soit $\mathcal{S}_2$ la similitude directe définie par :
   - le point $C_1$ et son image $C'$ d'affixe : $c'{=}1{+}4{\cdot}\mathrm{i}$ ;
   - le point $D_1$ et son image $D'$ d'affixe : $d'{=}{-}2{+}2{\cdot}\mathrm{i}$.

   a. Montrer que l'expression complexe de $\mathcal{S}_2$ est :
   $$z' = \mathrm{i}{\cdot}z + 1 + \mathrm{i}$$
   b. En déduire les éléments caractéristiques de cette similitude.
3. Soit $\mathcal{S}$ la similitude définie par : $\mathcal{S} = \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1$.
   Déterminer l'expression complexe de $\mathcal{S}$.

### Exercice 4116

Le plan complexe est muni d'un repère $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$ orthonormé.

Soit $A$ et $C$ les points d'affixes respectives :

$$a = 3+5{\cdot}\mathrm{i} \quad ; \quad c = 1+4{\cdot}\mathrm{i}$$

Soit $f$ la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par :
$z' = (2-2\cdot\mathrm{i})\cdot z + 1$

1. Soit $M$ le point d'affixe $z = x + i\cdot y$, où on suppose que $x$ et $y$ sont des entiers relatifs. Soit $M'$ l'image de $M$ par $f$. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $x+3\cdot y=2$

2. On considère l'équation $(E)$ : $x+3\cdot y=2$, où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs.
   a. Vérifier que le couple $(-4\,;2)$ est une solution de $(E)$.
   b. Résoudre l'équation $(E)$.
   c. En déduire l'ensemble des points $M$ dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5\,;5]$ et tels que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux. Placer ces points sur la figure.

## 3. Similitude indirecte :

*(+2 exercices pour les enseignants)*

### Exercice 4003

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

Soient $A$, $B$ et $C$ les points d'affixes respectives :
$z_A = 2+\mathrm{i}$ ; $z_B = 5+2\cdot\mathrm{i}$ ; $z_C = \mathrm{i}$

$s_1$ désigne la symétrie d'axe $(AB)$.

1. Démontrer que $s_1$ transforme tout point $M$ d'affixe $z$ en un point $M'$ telle que :
$$z' = \Big(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\cdot\mathrm{i}\Big)\cdot\overline{z} + \Big(-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\cdot\mathrm{i}\Big)$$
2. En déduire l'affixe de $C'$, symétrique de $C$ par rapport à $(AB)$.
3. Démontrer que l'ensemble des points $M'$ tels que $z'$ est imaginaire pur est la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $4x+3y=1$
4. Vérifier que le point $C'$ appartient à $(\mathcal{D})$.

### Exercice 3969

Soit $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ un repère orthonormé direct du plan complexe *(unité graphique : 4 cm)*

On désigne par $A$ le point d'affixe : $z_A = 1$.

On considère la transformation $T$ du plan qui, à tout point $M$ d'affixe $z$, associe le point d'affixe $-\overline{z}+2$.

1. Déterminer les images respectives par la transformation $T$ du point $A$ et du point $\Omega$ d'affixe $1+\mathrm{i}\cdot\sqrt{3}$.
2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $T$.
3. Déterminer l'image par la transformation $T$ du cercle $\mathscr{C}$ de centre $O$ et de rayon 1.

### Exercice 4029

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on considère les deux rectangles $OABC$ et $DEFG$ où les points $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$ ont pour affixes respectives :

$z_A = -2$ ; $z_B = -2+\mathrm{i}$ ; $z_C = \mathrm{i}$ ; $z_D = 1$

$z_E = 1+3\cdot\mathrm{i}$ ; $z_F = \frac{5}{2}+3\cdot\mathrm{i}$ ; $z_G = \frac{5}{2}$

On considère la similitude indirecte $s'$ d'écriture complexe :
$z' = -\frac{2}{3}\cdot\mathrm{i}\cdot\overline{z} + \frac{5}{3}\cdot\mathrm{i}$

1. Déterminer l'image du rectangle $DEFG$ par la similitude $s'$.
2. On considère la similitude $g = s'\circ s$. Déterminer l'image du rectangle $OABC$ par la similitude $g$.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non-frutueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   La similitude $g$ a-t-elle des points fixes? Que peut-on en conclure pour $g$?

### Exercice 4113

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

1. On considère la similitude $s$ admettant l'écriture complexe :
$$z' = \Big(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}\cdot\mathrm{i}\Big)\cdot z + \frac{23}{5}+\frac{9}{5}\cdot\mathrm{i}$$
Déterminer l'ensemble des points invariants de la similitude $s$.
2. On considère la similitude $\sigma$ admettant l'écriture complexe :
$z' = \mathrm{i}\cdot\overline{z}+1+\mathrm{i}$

   Déterminer l'ensemble des points invariants de la similitude $\sigma$.

## 4. Annales - Similitudes directes :

*(+3 exercices pour les enseignants)*

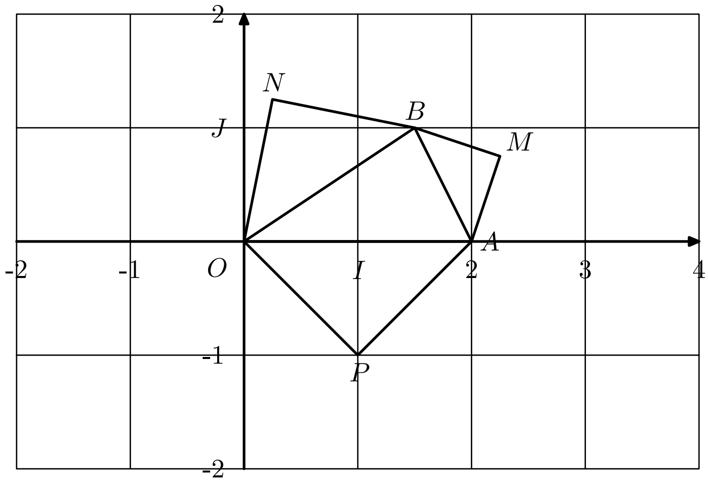
### Exercice 3949

Le plan complexe est muni d'un repère $\big(O\,;\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OJ}\big)$ orthonormé direct. On considère les points $A$ et $B$ d'affixes respectives :

$z_A = 2$ ; $z_B = \frac{3}{2}+\mathrm{i}$

On considère les points $M$, $N$ et $P$ tels que les triqngles $AMB$, $BNO$ et $OPA$ soient des triangles rectangles isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-dessous :




On note $s_1$ la similitude directe de centre $A$ qui transforme $M$ en $B$.

On note $s_2$ la similitude directe de centre $O$ qui transforme $B$ en $N$. On considère la transformation :

$r = s_2 \circ s_1$

**Le but de l'exercice est de démontrer de deux façons différentes que les droites $(OM)$ et $(PN)$ sont perpendiculaires.**

1. **A l'aide des transformations :**
   a. Donner l'angle et le rapport de $s_1$ et de $s_2$.
   b. Déterminer l'image du point $M$ puis celle du point $I$ par la transformation $r$.
   c. Justifier que $r$ est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ dont on précisera le centre.
   d. Quelle est l'image du point $O$ par $r$ ?
   e. En déduire que les droites $(OM)$ et $(PN)$ sont perpendiculaires.
2. **En utilisant les nombres complexes :**
   a. Donner les écritures complexes de $s_1$ et $s_2$. On utilisera les résultats de la question 1. a..
   b. En déduire les affixes $z_M$ et $z_N$ des points $M$ et $N$.
   c. Donner, sans justification, l'affixe $z_p$ du point $P$ puis démontrer que les droites $(OM)$ et $(PN)$ sont perpendiculaires.

### Exercice 3147

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})$ *(unité 1 cm)*. On construira une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

1. Soit $A$ le point d'affixe 3, et $r$ la rotation de centre $O$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. On note $B$, $C$, $D$, $E$ et $F$ les images respectives des points $A$, $B$, $C$, $D$ et $E$ par la rotation $r$.

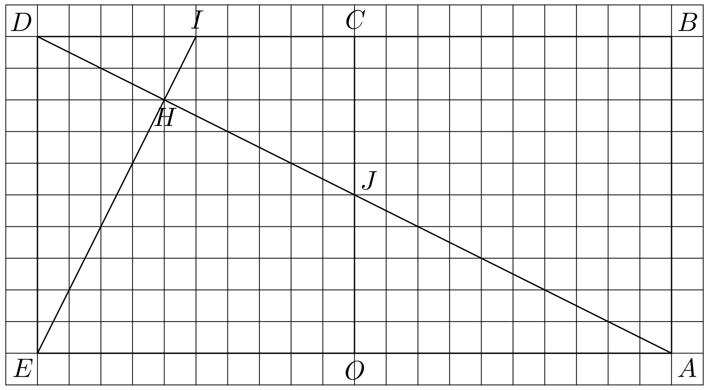
   Montrer que $B$ a pour affixe $\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$
2. Associer à chacun des points $C$, $D$, $E$ et $F$ l'une des affixes de l'ensemble suivant :
   $$\left\{-3\,;\,-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i\,;\,\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i\,;\,-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right\}$$
3. a. Déterminer $r(F)$.
   b. Quelle est la nature du polygone $ABCDEF$ ?
4. Soit $s$ la similitude directe de centre $A$, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Soit $s'$ la similitude directe de centre $E$ transformant $F$ en $C$.
   a. Déterminer l'angle et le rapport de $s'$ ? En déduire l'angle et le rapport de $s' \circ s$.
   b. Quelle est l'image du point $D$ par $s' \circ s$ ?
   c. Déterminer l'écriture complexe de $s'$.
5. Soit $A'$ le symétrique de $A$ par rapport à $C$.
   a. Sans utiliser les nombres complexes, déterminer $s(A')$ puis l'image de $A'$ par $s' \circ s$.
   b. Calculer l'affixe du point $A'$. Retrouver alors le résultat du a. en utilisant l'écriture complexe $s' \circ s$.

### Exercice 3183

Sur la figure donnée ci-dessous, on considère les carrés $OABC$ et $OCDE$ tels que :

$$\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OC}\right) = \left(\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{OE}\right) = \frac{\pi}{2}$$

On désigne par $I$ le milieu du segment $[CD]$, par $J$ le milieu du segment $[OC]$ et par $H$ le point d'intersection des segments $[AD]$ et $[IE]$




1. Justifier l'existence d'une similitude directe $s$ transformant $A$ en $I$ et $D$ en $E$.
2. Déterminer le rapport de cette similitude $s$.

   On admet que l'angle de la similitude $s$ est égal à $\dfrac{\pi}{2}$.
3. Donner, sans justifier, l'image de $B$ par $s$.
4. Déterminer et placer l'image de $C$ par $s$.
5. Soit $\Omega$ le centre de la similitude $s$ :
   a. Montrer que $\Omega$ appartient au cercle de diamètre $[AI]$ et à celui de diamètre $[DE]$.
   b. Montrer que $\Omega$ ne peut être le point $H$.
   c. Construire $\Omega$.
6. On considère le repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OC}\right)$
   a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude $s$.
   b. En déduire l'affixe du centre $\Omega$ de $s$.

### Exercice 4031

On considère un carré direct $ABCD$ *(c'est à dire un carré*

*ABCD tel que* $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$*)* de centre $I$.

Soit $J$, $K$ et $L$ les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[CD]$ et $[DA]$. $\Gamma_1$ désigne le cercle de diamètre $[AI]$ et $\Gamma_2$ désigne le cercle de diamètre $[BK]$.

**Partie A**

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe $s$ telle que :
   $s(A)=I \quad ; \quad s(B)=K$

2. Montrer que les cercles $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ se coupent en deux points distincts : le point $J$ et le centre $\Omega$ de la similitude directe $s$.

3. a. Déterminer les images par $s$ des droites $(AC)$ et $(BC)$. En déduire l'image du point $C$ par $s$.

   b. Soit $E$ l'image par $s$ du point $I$. Démontrer que $E$ est le milieu du segment $[ID]$.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Démontrer que les points $A$, $\Omega$ et $E$ sont alignés.
   *(On pourra considérer la transformation $t=s\circ s$)*

**Partie B**

Désormais, on considère que le côté du carré mesure 10 unités et on se place dans le repère orthonormé direct $\left(A\,;\,\frac{1}{10}\cdot\overrightarrow{AB}\,;\,\frac{1}{10}\cdot\overrightarrow{AD}\right)$.

1. Donner les affixes des points $A$, $B$, $C$ et $D$.

2. Démontrer que la similitude directe $s$ a pour écriture complexe :
   $z'=\frac{\mathrm{i}}{2}\cdot z+5+5\cdot\mathrm{i}$

3. Calculer l'affixe $\omega$ du centre $\Omega$ de $s$.

4. Calculer l'affixe $z_E$ du point $E$ et retrouver l'alignement des points $A$, $\Omega$ et $E$.

5. Démontrer que les droites $(AE)$, $(CL)$ et $(DJ)$ sont concourantes au point $\Omega$.

**Exercice 4127**

Le plan complexe est muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct.
On considère la similitude indirecte $f$ d'écriture complexe :
$z'=\left(1+\mathrm{i}\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\overline{z}$
où $\overline{z}$ désigne le conjugé de $z$.

Soient les points $A$ et $B$ d'affixes respectives :
$z_A=\sqrt{6}+\mathrm{i}\cdot\sqrt{2} \quad ; \quad z_B=-\sqrt{2}+\mathrm{i}\cdot\sqrt{6}$

On note $A'$ et $B'$ les images respectives des points $A$ et $B$ par $f$.

**Une figure fournie en ANNEXE du sujet, sera complétée et rendue avec la copie. Les différentes constructions seront faites à la règle et au compas, et les traits de construction devront apparaître clairement.**

1. a. Ecrire les affixes des points $A$ et $B$ sous forme exponentielle.

   b. Montrer que le triangle $OAB$ est rectangle isocèle direct.

   c. En déduire la nature du triangle $OA'B'$.

   d. Montrer que l'affixe $z'_A$ de $A'$ vérifie l'égalité :
   $z_{A'}=2\cdot z_A$
   En déduire la construction de $A'$ et $B'$.

2. On note $r$ la rotation de centre $O$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et $s$ la symétrie orthogonale d'axe $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\right)$.
   On pose : $g=r\circ s$.

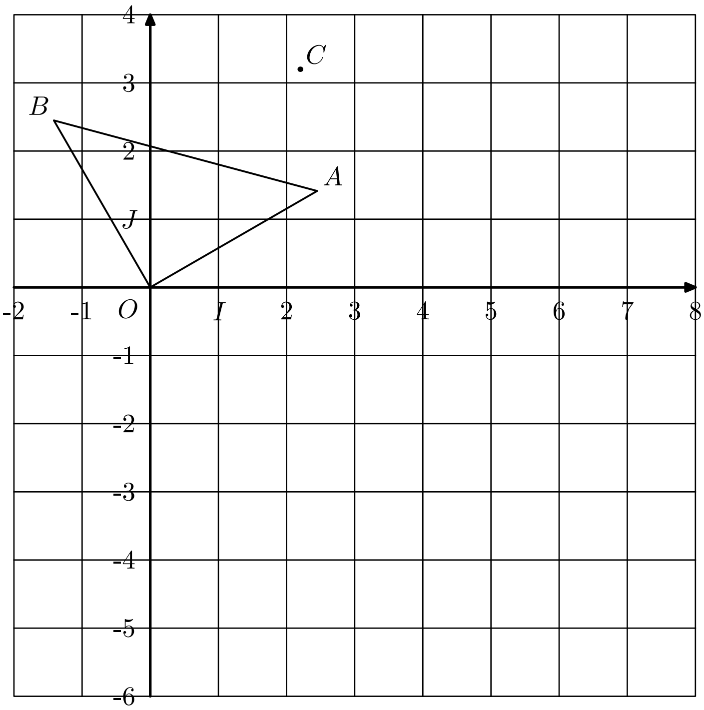
   a. Déterminer l'écriture complexe de la transformation $g$.

   b. Montrer que les points $O$ et $A$ sont invariants par $g$.

   c. En déduire la nature de la transformation $g$.

3. a. Montrer que l'on peut écrire $f=h\circ g$, où $h$ est une homothétie de centre et de rapport à déterminer.

   b. Sur la figure placée en **ANNEXE**, un point $C$ est placé. Faire la construction de l'image $C'$ de $C$ par la transformation $f$.




## 5. Annales - Similitudes indirectes :

*(+3 exercices pour les enseignants)*

**Exercice 3938**

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$.
*On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.*

1. On considère les points $A$ d'affixe 1 et $B$ d'affixe 1. On appelle $S$ la réflexion *(symétrie axiale)* d'axe $(AB)$.
   Montrer que l'image $M'$ par $S$ d'un point $M$ d'affixe $z$ a pour affixe :

$z' = -\mathrm{i}\cdot\overline{z} + 1 + \mathrm{i}$

2. On note $H$ l'homothétie de centre $A$ et de rapport $-2$. Donner l'écriture complexe de $H$.

3. On note $f$ la composée $H \circ S$.
   a. Montrer que $f$ est une similitude.
   b. Déterminer l'écriture complexe de $f$.

4. On appelle $M'$ l'image d'un point $M$ par $f$.
   a. Démontrer que l'ensemble des points $M$ du plan tels que $\overrightarrow{AM'} = -\overrightarrow{AM}$ est la droite $(AB)$.
   b. Démontrer que l'ensemble des points $M$ du plan tels que $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM}$ est la perpendiculaire en $A$ à la droite $(AB)$.

**Exercice 4032**

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct.

*On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.*

1. On considère les points $A$ d'affixe 1 et $B$ d'affixe i. On appelle $S$ la réflexion *(symétrie axiale)* d'axe $(AB)$.

   Montrer que l'image $M'$ par $S$ d'un point $m$ d'affixe $z$ a pour affixe :
   $z' = -\mathrm{i}\cdot\overline{z} + 1 + \mathrm{i}$

2. On note $H$ l'homothétie de centre $A$ et de rapport $-2$. Donner l'écriture complexe de $H$.

3. On note $f$ la composée $H \circ S$.
   a. Montrer que $f$ est une similitude.
   b. Déterminer l'écriture complexe de $f$.

4. On appelle $M''$ l'image d'un point $M$ par $f$.
   a. Démontrer que l'ensemble des points $M$ du plan tels que :
   $\overrightarrow{AM''} = -2\cdot\overrightarrow{AM}$
   est la droite $(AB)$.
   b. Démontrer que l'ensemble des points $M$ du plan tels que :
   $\overrightarrow{AM''} = 2\cdot\overrightarrow{AM}$
   est la perpendiculaire en $A$ à la droite $(AB)$.

## 6. Annales - Suites de points :

*(+1 exercice pour les enseignants)*

**Exercice 3176**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ *(unité graphique 4 cm)*.

Soit $\Omega$ le point d'affixe 2. On appelle $r$ la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et $h$ l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On pose $\sigma = h \circ r$.
   a. Quelle est la nature de la transformation $\sigma$ ? Préciser ses éléments caractéristiques.
   b. Montrer que l'écriture complexe de $\sigma$ est :
   $z \longmapsto \frac{1+\mathrm{i}}{2}z + 1 - \mathrm{i}$
   c. Soit $M$ un point quelconque du plan d'affixe $z$. On désigne par $M'$ son image par $\sigma$ et on note $z'$ l'affixe de $M'$. Montrer que :
   $z - z' = \mathrm{i}\cdot(2 - z')$

2. a. **Question de cours**
   - *Prérequis : définitions géométriques du module d'un nombre complexe et d'un argument d'un nombre complexe non nul. Propriétés algébriques modules et des arguments.*

   Démontrer que : si $A$ est un point donné d'affixe $a$, alors l'image du point $P$ d'affixe $p$ par la roation de centre $A$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est le point $Q$ d'affixe $q$ telle que : $q - a = \mathrm{i}(p - a)$.

   b. Déduire des questions précédentes la nature du triangle $\Omega MM'$, pour $M$ distinct de $\Omega$.

3. Soit $A_0$ le point d'affixe $2+\mathrm{i}$. On considère la suite $\left(A_n\right)$ de points du plan définis par :

   pour tout entier naturel $n$ : $A_{n+1} = \sigma\left(A_n\right)$.

   a. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, l'affixe $a_n$ de $A_n$ est donnée par :
   $$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2$$
   b. Déterminer l'affixe de $A_5$.

4. Déterminer le plus petit entier $n_0$ tel que l'on ait :

   pour $n \geqslant n_0$, le point $A_n$ est dans le disque de centre $\Omega$ et de rayon 0,01.

**Exercice 3947**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ *(unité graphique : 4 cm)*. Soit $\Omega$ le point d'affixe 2. On appelle $r$ la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et $h$ l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On pose : $\sigma = h \circ r$.
   a. Quelle est la nature de la transformation $\sigma$ ? Préciser ses éléments caractéristiques.
   b. Montrer que l'écriture complexe de $4\sigma$ est :
   $z \longmapsto \frac{1+\mathrm{i}}{2}\cdot z + 1 - \mathrm{i}.$
   c. Soit $M$ un point quelconque du plan d'affixe $z$. On désigne par $M'$ son image par $\sigma$ et on note $z'$ l'affixe de $M'$. Montrer que : $z - z' = \mathrm{i}\cdot(2 - z')$

2. a. **Question de cours :**
   *Prérequis : définitions géométriques du module d'un complexe et d'un argument d'un nombre complexe non nul. Propriétés algébriques des modules et des*

*arguments.*

Démontrer que : si $A$ est un point donné d'affixe $a$, alors l'image du point $P$ d'affixe $p$ par la rotation de centre $A$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est le point $Q$ d'aqffixe $q$ telle que : $q-a=\mathrm{i}\cdot(p-a)$.

b. Déduire des questions précédentes la nature du triangle $\Omega MM'$, pour $M$ distinct de $\Omega$.

3. Soit $A_0$ le point d'affixe $2+\mathrm{i}$. On considère la suite $(A_n)$ de points du plan définis par :

pour tout entier naturel $n$ : $A_{n+1}=\sigma(A_n)$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, l'affixe $a_n$ de $A_n$ est donnée par :

$$a_n=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\frac{(n+2)\pi}{2}}+2$$

b. Déterminer l'affixe de $A_5$.

4. Déterminer le plus petit entier $n_0$ tel que l'on ait : pour $n\geqslant n_0$, le point $A_n$ est dans le disque de centre $\Omega$ et de rayon 0,01.

## *7. Annales - Arithmétiques :* *(+1 exercice pour les enseignants)*

### Exercice 3944

1. Le plan complexe est rapporté à un repère à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$. Soient $A$, $B$ et $C$ les points d'affixes respectives :

$z_A=2+\mathrm{i}$ ; $z_B=5+2\cdot\mathrm{i}$ , $z_C=\mathrm{i}$

$s_1$ désigne la symétrie d'axe $(AB)$.

a. Démontrer que $s_1$ transforme tout point $M$ d'affixe $z$ en un point $M'$ d'affixe $z'$ telle que :

$$z'=\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\cdot\mathrm{i}\right)\cdot\overline{z}+\left(-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\cdot\mathrm{i}\right)$$

b. En déduire l'affixe de $C'$, symétrique de $C$ par rapport à $(AB)$.

c. Démontrer que l'ensemble des points $M$ tels que $z'$ est imaginaire pur est la droite $(\mathcal{D})$ d'équation :

$4\cdot x+3\cdot y=1$

d. Vérifier que le point $C$ appartient à $\mathcal{D}$.

2. a. Démontrer que les droites $(\mathcal{D})$ et $(AB)$ sont sécantes en un point $\Omega$ dont on précisera l'affixe $\omega$.

b. On désigne par $s_2$ la symétrie d'axe $(\mathcal{D})$ et par $f$ la transformation définie par $f=s_2\circ s_1$. Justifier que $f$ est une similitude directe et préciser sont rapport.

c. Déterminer les images des points $C$ et $\Omega$ par la transformation $f$.

d. Justifier que $f$ est une rotation dont on donnera le centre.

3. Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.

a. Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x\,;y)$ solutions de l'équation :

$4\cdot x+3\cdot y=1$.

b. Déterminer les points de $(\mathcal{D})$ à coordonnées entières dont la distance au point $O$ est inférieure à 9.

### Exercice 4071

$ABC$ est un triangle équilatéral tel que :

$$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}+2\cdot k\cdot\pi \quad \text{où } k\in\mathbb{Z}$$

Soit $t$ un nombre réel fixe et soient les points $M$, $N$ et $P$, deux à deux distincts, définis par :

$$\overrightarrow{AM}=t\cdot\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{BN}=t\cdot\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{CP}=t\cdot\overrightarrow{CA}$$

Le but de l'exercice est de démontrer l'existence d'une unique similitude directe $\sigma$ qui transforme les points $A$, $B$ et $C$ en respectivement $M$, $N$ et $P$, et d'en préciser les éléments caractéristiques.

On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ direct.

On note $a$, $b$, $c$, $m$, $n$ et $p$, les affixes respectives des points $A$, $B$, $C$, $M$, $N$ et $P$ :

1. On rappelle que toute similitude conserve le barycentre.

a. Exprimer $m$, $n$ et $p$ en fonction de $a$, $b$, $c$ et $t$.

b. En déduire que les deux triangles $ABC$ et $MNP$ ont même centre de gravité.
On notera $G$ ce centre de gravité.

c. On suppose que $\sigma$ existe. Déterminer l'image de $G$ par $\sigma$.

2. On considère la rotation $r$ de centre $G$ et d'angle $\frac{2\cdot\pi}{3}$.

a. Vérifier que $M$ est le barycentre du système de points :

$\left\{(A\,;1-t)\,;\,(B\,;t)\right\}$

et, en déduire que : $r(M)=N$.
On admet de même que : $r(N)=P$ ; $r(P)=M$.

b. Soit $\sigma_1$, la similitude directe de centre $G$ de rapport $\frac{GM}{GA}$ et d'angle $\left(\overrightarrow{GA}\,;\overrightarrow{GM}\right)$.
Montrer qu'elle transforme les points $A$, $B$ et $C$ en respectivement $M$, $N$ et $P$.

c. Conclure sur l'existence et l'unicité de $\sigma$.

### Exercice 3215

*Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.*

*Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée*

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation :

$x^2-x+4\equiv 0 \pmod{6}$

a. Toutes les solutions sont des entiers pairs.

b. Il n'y a aucune solution.

c. Les solutions vérifient $x \equiv 2 \pmod{6}$

d. Les solutions vérifient $x\equiv 2 \pmod{6}$ ou $x\equiv 5 \pmod{6}$.

2. On se propose de résoudre l'équation $(E) : 24x+34y=2$, oùx et $y$ sont des entiers relatifs.

a. Les solutions de $(E)$ sont toutes de la forme:
$(x;y)=(34k-7\ ;\ 5-24k)$ où $k\in\mathbb{Z}$

b. L'équation $(E)$ n'a aucune solution.

c. Les solutions de $(E)$ sont toutes de la forme:
$(x;y)=(17k-7\ ;\ 5-12k)$ où $k\in\mathbb{Z}$

d. Les solutions de $(E)$ sont toutes de la forme:
$(x;y)=(-7k\ ;\ 5k)$ où $k\in\mathbb{Z}$

3. On considère les deux entiers $n=1789$ et $p=1789^{2005}$. On a alors:

a. $n\equiv 4 \pmod{17}$ et $p\equiv 0 \pmod{17}$

b. $p$ est un entier premier.

c. $p\equiv 4 \pmod{17}$

d. $p\equiv 1 \pmod{17}$

4. On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, les points $A$ et $B$ d'affixes respectives $a$ et $b$. Le triangle $MAB$ est rectangle isocèle direct d'hypoténuse $[AB]$ si, et seulement, si le point $M$ d'affixe $z$ est tel que:

a. $z=\dfrac{b-\mathrm{i}a}{1-\mathrm{i}}$

b. $a-z=\mathrm{i}(b-z)$

c. $z-a=e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(b-a)$

d. $b-z=\dfrac{\pi}{2}(a-z)$

5. On considère dans le plan orienté deux points distincts $A$ et $B$ ; on note $I$ le milieu du segment $[AB]$. Soit $f$ la similitude directe de centre $A$, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ ; soit $g$ la similitude directe de centre $A$, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ ; soit $h$ la symétrie centrale de centre $I$

a. $h\circ g\circ f$ transforme $A$ en $B$ et c'est une rotation.

b. $h\circ g\circ f$ est la réflexion ayant pour axe la médiatrice du segment $[AB]$.

c. $h\circ g\circ f$ n'est pas une similitude.

d. $h\circ g\circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

**Exercice 3218**

Pour chacune des six affirmations, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant le choix effectué.

1. Le $PGCD$ de 2004 et 4002 est 6.

2. Si $p$ et $q$ sont deux entiers naturels non nuls, $2^{pq}-1$ est divisible par $2^p-1$ et $2^q-1$.

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $2^n-1$ n'est jamais divisible par 9.

4. L'ensemble des couples d'entiers solutions de l'équation:
$24x+35y=9$
est l'ensemble des couples:
$(-144+70k\ ;\ 99-24k)$ où $k\in\mathbb{Z}$

5. Soient $A$ et $B$ deux points distincts du plan; si on note $f$ l'homothétie de centre $A$ et de rapport 3 et $g$ l'homothétie de centre $B$ et de rapport $\dfrac{1}{3}$ alors $g\circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

6. Soit $s$ la similitude d'écriture complexe $z'=\mathrm{i}\,\overline{z}+(1-\mathrm{i})$, l'ensemble des points invariants de $s$ est une droite.

## 8. Similitudes :

**Exercice 3937**

On démontrera sans démonstration les deux propriétés suivantes:

- **Propriété 1:** Toute similitude indirecte qui transforme un point $M$ d'affixe $z$ en un point $M'$ d'affixe $z'$ admet une expression complexe de la forme:
$z'=a\cdot\overline{z}+b$ où $a\in\mathbb{C}^*$ et $b\in\mathbb{C}$.
- **Propriété 2:** Soit $C$ un point d'affixe $c$. Pour tout point $D$, distinct de $C$, d'affixe $d$ et pour tout point $E$, distinct de $C$, d'affixe $e$, on a:
$\left(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CE}\right)=\arg\left(\dfrac{e-c}{d-c}\right)\ [2\cdot\pi]$

**Question:** Montrer qu'une similitude indirecte transforme un angle orienté en son opposé.

**Exercice 3939**

On suppose connu le résultat suivant:

Une application $f$ du plan muni d'un repère orthonormé direct dans lui-même est une similitude directe si, et seulement si, $f$ admet une écriture complexe de la forme:
$z'=a\cdot z+b$ où $a\in\mathbb{C}^*$ et $b\in\mathbb{C}$.

*Démonstration de cours:* on se place dans le plan complexe. Démontrer que si $A$, $B$, $A'$ et $B'$ sont quatre points tels que $A$ est distinct de $B$ et $A'$ est distinct de $B'$, alors il existe une unique similitude directe transformant $A$ en $A'$ et $B$ en $B'$.

**Exercice 3948**

**Question de cours:**

*Prérequis: définitions géométriaues du module d'un complexe et d'un argument d'un nombre complexe non nul. Propriétés algébriques des modules et des arguments.*

Démontrer que: si $A$ est un point donné d'affixe $a$, alors l'image du point $P$ d'affixe $p$ par la rotation de centre $A$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ est le point $Q$ d'affixe $q$ telle que: $q-a=\mathrm{i}\cdot(p-a)$.

# 255. Exercices non-classés :

**Exercice 4315**

On considère l'équation : $(E) : 3{\cdot}x - 2{\cdot}y = 1$

1. a. Montrer que le couple $(-1\,;-2)$ est une solution de $(E)$.

   b. Déterminer tous les couples $(x\,;y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation $(E)$.

2. Soient $d$ et $d'$ les droites d'équations respectives :
   $y = 2{\cdot}x + 4 \quad ; \quad 3{\cdot}x - 2{\cdot}y = 1$

   a. Vérifier que pour tout entier relatif $k$, le point $A_k$ de coordonnées $(k-3\,;2{\cdot}k-2)$ appartient à la droite $d$.

   On admettra que ce sont les seuls points de $d$ à coordonnées entières.

   b. Montrer que les seuls points de $d'$ à coordonnées entières sont les points $B_{k'}$ de coordonnées :
   $(2{\cdot}k' - 1\,;3{\cdot}k' - 2)$ où $k' \in \mathbb{Z}$.

3. a. Existe-t-il deux entiers relatifs $k$ et $k'$ tels que : $A_k = B_{k'}$ ?

   b. Déterminer les entiers relatifs $k$ et $k'$ tels que le segment $\left[A_k B_{k'}\right]$ soit parallèle à l'axe des abscisses.

   c. Trouver l'entier $q$ tel que : $\overrightarrow{A_{3q}B_{2q}} = 4{\cdot}\overrightarrow{u}$

4. Soit $\Omega$ un point quelconque du plan dont l'affixe est notée $\omega$. On note $H$ le milieu du segment $\left[A_6 B_4\right]$.

   On désigne par $f$ la similitude directe de centre $\Omega$, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

   a. Donner l'écriture complexe de la similitude $f$.

   b. Déterminer l'affixe du point $\Omega$ pour que l'image du point $H$ soit l'origine $O$ du repère.

**Exercice 4653**

Soit un triangle équilatéral direct $ABC$ et soit $D$ un point du segment $[BC]$. La parallèle à la droite $(AC)$ menée par $D$ coupe la droite $(AB)$ en $E$ et la parallèle à la droite $(AB)$ menée par $D$ coupe la droite $(AC)$ en $F$.
Soit le point $G$, centre de gravité du triangle $ABC$ et les points $H$ et $A'$, symétriques de $G$ et $A$ par rapport à la droite $(BC)$.
On définit les points $I$ et $J$ centres de gravité respectifs des triangles $BDE$ et $CDF$.

On dédinit les similitudes directes $S_1$, de centre $C$, de rapport $\sqrt{3}$, d'angle $\dfrac{\pi}{6}$ et $S_2$, de centre $B$, de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, d'angle $\dfrac{\pi}{6}$ et leur composée : $f = S_2 \circ S_1$

1. Déterminer les images de $J$ et $H$ par $f$.

2. Déterminer la nature et des éléments caractéristiques de $f$.

3. En déduire la nature du triangle $HIJ$.