

Hors programme lycée/Similitudes

1. Transformation et complexe :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 1



On considère le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On considère le point M du plan d'affixe z . Pour chaque question, on associe au point M un point M' dont l'affixe z' est définie en fonction de z .

Déterminer la nature et les caractéristiques de chacune de ces applications :

a. $z' = z - 1 + 2i$ b. $z' = 2z + 3 - 2i$

c. $z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot z + 1 + i$

Exercice 2



Dans le complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère la similitude directe f d'écriture complexe :

$$z \mapsto \frac{3}{2} \cdot (1 - i) \cdot z + 4 - 2i$$

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie :

$f = r \circ h$ où h est l'homothétie de rapport $3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe $-2 - 2i$ et où r est la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Exercice 3



Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On désigne par m un nombre réel. On considère la transformation T_m du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = (m + i) \cdot z + m - 1 - i$$

1. Peut-on choisir m de telle sorte que T_m soit une translation?
2. Déterminer le réel m de telle sorte que T_m soit une rotation. Préciser alors le centre et l'angle de cette rotation.

2. Similitude directe :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 4



Le plan complexe est muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct d'unité graphique 1 cm , on considère les points A, B, C, M, N et P d'affixes respectives :

$$a = 1 + i \quad ; \quad b = -1 + 2i \quad ; \quad c = 2 + 3i$$

$$m = 7 - 5i \quad ; \quad n = 5 - i \quad ; \quad p = 9 + i$$

1.
 - a. Placer les points A, B, C, M, N et P dans le repère.
 - b. Calculer les longueurs des côtés des triangles ABC et NMP .
 - c. En déduire que ces deux triangles sont semblables.

Dans la suite de l'exercice, on se propose de mettre en évidence la similitude directe qui transforme le triangle ABC en le triangle MNP .

2. Soit s la similitude directe qui transforme le point A en N et le point B en P .

- a. Montrer qu'une écriture complexe de la similitude s est :

$$z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right) \cdot z + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i$$

- b. Déterminer le rapport, la valeur de l'angle arrondi au degré, ainsi que le centre de la similitude s .
- c. Vérifier que la similitude s transforme le point C en M .

Exercice 5



Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité 1 cm .

1. Soient les points C et D d'affixes respectives $c=3$ et $d=1-3i$, et S_1 la similitude qui à tout point M du plan associe le point M_1 symétrique de M par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$ des réels.
 - a. Placer les points C et D puis leurs images respectives C_1 et D_1 par S_1 . On complètera la figure au fur et à mesure de l'exercice.
 - b. Donner l'expression complexe de S_1 .
2. Soit S_2 la similitude directe définie par :
 - le point C_1 et son image C' d'affixe : $c' = 1 + 4i$;
 - le point D_1 et son image D' d'affixe : $d' = -2 + 2i$.
 - a. Montrer que l'expression complexe de S_2 est : $z' = i \cdot z + 1 + i$
 - b. En déduire les éléments caractéristiques de cette similitude.
3. Soit S la similitude définie par : $S = S_2 \circ S_1$. Déterminer l'expression complexe de S .

Exercice 6



Le plan complexe est muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé.

Soit A et C les points d'affixes respectives :

$$a = 3 + 5i \quad ; \quad c = 1 + 4i$$

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par :
 $z' = (2 - 2i) \cdot z + 1$

1. Soit M le point d'affixe $z = x + iy$, où on suppose que x et y sont des entiers relatifs. Soit M' l'image de M par f .
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et \overrightarrow{CA} sont orthogonaux si, et seulement si, $x + 3y = 2$
2. On considère l'équation (E) : $x + 3y = 2$, où x et y sont

des entiers relatifs.

- a. Vérifier que le couple $(-4; 2)$ est une solution de (E).
- b. Résoudre l'équation (E).
- c. En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5; 5]$ et tels que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et \overrightarrow{CA} sont orthogonaux. Placer ces points sur la figure.

3. Similitude indirecte :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 7



Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives :

$$z_A = 2 + i ; z_B = 5 + 2i ; z_C = i$$

s_1 désigne la symétrie d'axe (AB) .

1. Démontrer que s_1 transforme tout point M d'affixe z en un point M' telle que :

$$z' = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right) \cdot \bar{z} + \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\right)$$

2. En déduire l'affixe de C' , symétrique de C par rapport à (AB) .
3. Démontrer que l'ensemble des points M' tels que z' est imaginaire pur est la droite (\mathcal{D}) d'équation $4x + 3y = 1$
4. Vérifier que le point C' appartient à (\mathcal{D}) .

Exercice 8



Soit $(O; \vec{u}; \vec{v})$ un repère orthonormé direct du plan complexe (*unité graphique* : 4 cm)

On désigne par A le point d'affixe : $z_A = 1$.

On considère la transformation T du plan qui, à tout point M d'affixe z , associe le point d'affixe $-\bar{z} + 2$.

1. Déterminer les images respectives par la transformation T du point A et du point Ω d'affixe $1 + i\sqrt{3}$.
2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation T .
3. Déterminer l'image par la transformation T du cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1.

Exercice 9



4. Annales - Similitudes directes :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 11



Le plan complexe est muni d'un repère $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$ orthonormé direct. On considère les points A et B d'affixes respectives :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les deux rectangles $OABC$ et $DEFG$ où les points A, B, C, D, E, F, G ont pour affixes respectives.

$$z_A = -2 ; z_B = -2 + i ; z_C = i ; z_D = 1$$

$$z_E = 1 + 3i ; z_F = \frac{5}{2} + 3i ; z_G = \frac{5}{2}$$

On considère la similitude indirecte s' d'écriture complexe :

$$z' = -\frac{2}{3} \cdot i \cdot \bar{z} + \frac{5}{3} \cdot i$$

1. Déterminer l'image du rectangle $DEFG$ par la similitude s' .
2. On considère la similitude $g = s' \circ s$. Déterminer l'image du rectangle $OABC$ par la similitude g .
3. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non-fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

La similitude g a-t-elle des points fixes? Que peut-on en conclure pour g ?

Exercice 10



Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1. On considère la similitude s admettant l'écriture complexe :

$$z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right) \cdot z + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i$$

Déterminer l'ensemble des points invariants de la similitude s .

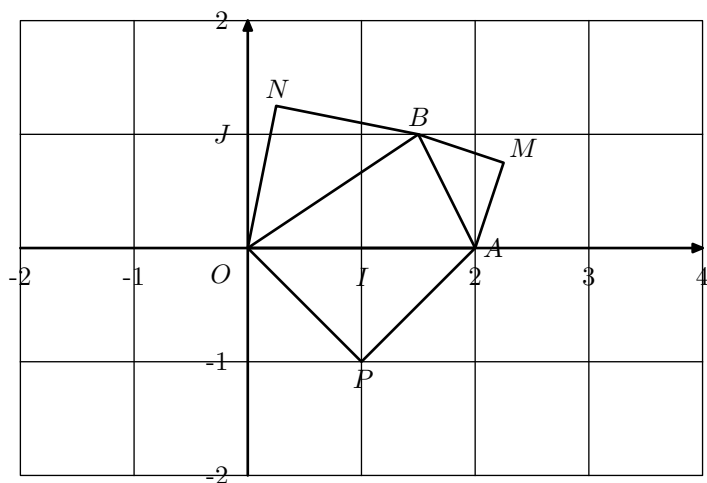
2. On considère la similitude σ admettant l'écriture complexe :

$$z' = i \cdot \bar{z} + 1 + i$$

Déterminer l'ensemble des points invariants de la similitude σ .

$$z_A = 2 ; z_B = \frac{3}{2} + i$$

On considère les points M, N et P tels que les triangles AMB, BNO et OPA soient des triangles rectangles isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-dessous :



On note s_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B .

On note s_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N . On considère la transformation :

$$r = s_2 \circ s_1$$

Le but de l'exercice est de démontrer de deux façons différentes que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

1. A l'aide des transformations :

- Donner l'angle et le rapport de s_1 et de s_2 .
- Déterminer l'image du point M puis celle du point I par la transformation r .
- Justifier que r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dont on précisera le centre.
- Quelle est l'image du point O par r ?
- En déduire que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

2. En utilisant les nombres complexes :

- Donner les écritures complexes de s_1 et s_2 . On utilisera les résultats de la question 1. a).
- En déduire les affixes z_M et z_N des points M et N .
- Donner, sans justification, l'affixe z_P du point P puis démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

Exercice 12



Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité 1 cm). On construira une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

- Soit A le point d'affixe 3, et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On note B, C, D, E et F les images respectives des points A, B, C, D et E par la rotation r .
Montrer que B a pour affixe $\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$
- Associer à chacun des points C, D, E et F l'une des affixes de l'ensemble suivant :

$$\left\{ -3; -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i; \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i; -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right\}$$
- Déterminer $r(F)$.
 - Quelle est la nature du polygone $ABCDEF$?

- Soit s la similitude directe de centre A , de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Soit s' la similitude directe de centre E transformant F en C .
 - Déterminer l'angle et le rapport de s' ? En déduire l'angle et le rapport de $s' \circ s$.
 - Quelle est l'image du point D par $s' \circ s$?
 - Déterminer l'écriture complexe de s' .
- Soit A' le symétrique de A par rapport à C .
 - Sans utiliser les nombres complexes, déterminer $s(A')$ puis l'image de A' par $s' \circ s$.
 - Calculer l'affixe du point A' . Retrouver alors le résultat du a) en utilisant l'écriture complexe $s' \circ s$.

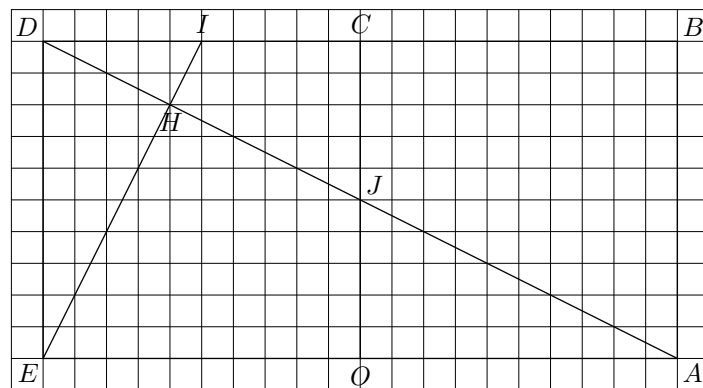
Exercice 13



Sur la figure donnée ci-dessous, on considère les carrés $OABC$ et $OCDE$ tels que :

$$(\vec{OA}; \vec{OC}) = (\vec{OC}; \vec{OE}) = \frac{\pi}{2}$$

On désigne par I le milieu du segment $[CD]$, par J le milieu du segment $[OC]$ et par H le point d'intersection des segments $[AD]$ et $[IE]$



- Justifier l'existence d'une similitude directe s transformant A en I et D en E .
- Déterminer le rapport de cette similitude s .
On admet que l'angle de la similitude s est égal à $\frac{\pi}{2}$.
- Donner, sans justifier, l'image de B par s .
- Déterminer et placer l'image de C par s .
- Soit Ω le centre de la similitude s :
 - Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre $[AI]$ et à celui de diamètre $[DE]$.
 - Montrer que Ω ne peut être le point H .
 - Construire Ω .
- On considère le repère orthonormé direct $(O; \vec{OA}; \vec{OC})$
 - Déterminer l'écriture complexe de la similitude s .
 - En déduire l'affixe du centre Ω de s .

Exercice 14



On considère un carré direct $ABCD$ (c'est à dire un carré

$ABCD$ tel que $(\vec{AB}; \vec{AD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ de centre I .

Soit J , K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[CD]$ et $[DA]$. Γ_1 désigne le cercle de diamètre $[AI]$ et Γ_2 désigne le cercle de diamètre $[BK]$.

Partie A

- Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s telle que :
 $s(A) = I$; $s(B) = K$
- Montrer que les cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en deux points distincts : le point J et le centre Ω de la similitude directe s .
- Déterminer les images par s des droites (AC) et (BC) . En déduire l'image du point C par s .
 - Soit E l'image par s du point I . Démontrer que E est le milieu du segment $[ID]$.
- Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.

Démontrer que les points A , Ω et E sont alignés.
(On pourra considérer la transformation $t = s \circ s$)

Partie B

Désormais, on considère que le côté du carré mesure 10 unités et on se place dans le repère orthonormé direct $(A; \frac{1}{10} \cdot \vec{AB}; \frac{1}{10} \cdot \vec{AD})$.

- Donner les affixes des points A , B , C et D .
- Démontrer que la similitude directe s a pour écriture complexe :
 $z' = \frac{i}{2} \cdot z + 5 + 5i$
- Calculer l'axe ω du centre Ω de s .
- Calculer l'axe z_E du point E et retrouver l'alignement des points A , Ω et E .
- Démontrer que les droites (AE) , (CL) et (DJ) sont concurrentes au point Ω .

Exercice 15



Le plan complexe est muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct.

On considère la similitude indirecte f d'écriture complexe :

$$z' = (1 + i \cdot \sqrt{3}) \cdot \bar{z}$$

où \bar{z} désigne le conjugué de z .

Soient les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = \sqrt{6} + i \cdot \sqrt{2} \quad ; \quad z_B = -\sqrt{2} + i \cdot \sqrt{6}$$

5. Annales - Similitudes indirectes :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 16



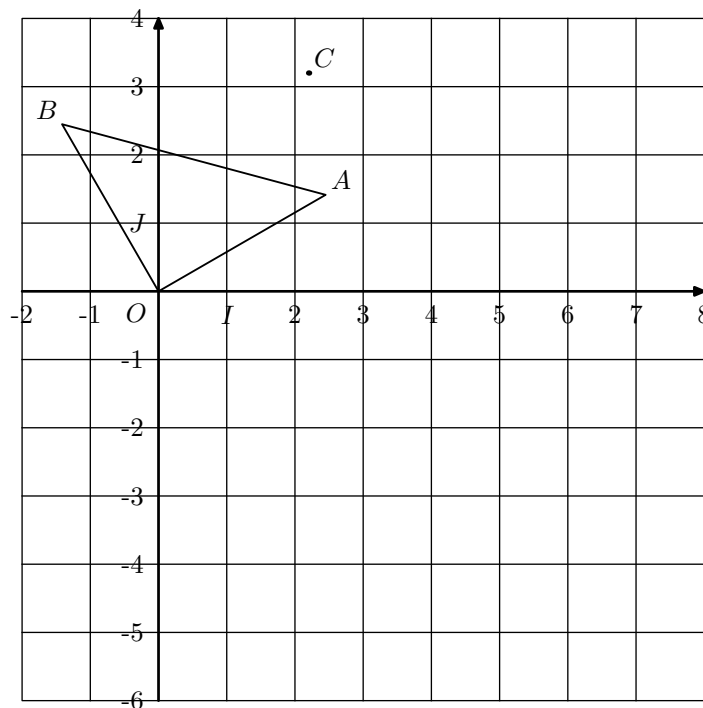
Le plan \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

On note A' et B' les images respectives des points A et B par f .

Une figure fournie en ANNEXE du sujet, sera complétée et rendue avec la copie. Les différentes constructions seront faites à la règle et au compas, et les traits de construction devront apparaître clairement.

- Ecrire les affixes des points A et B sous forme exponentielle.
 - Montrer que le triangle OAB est rectangle isocèle direct.
 - En déduire la nature du triangle $OA'B'$.
 - Montrer que l'axe z'_A de A' vérifie l'égalité :
 $z_{A'} = 2 \cdot z_A$
En déduire la construction de A' et B' .
- On note r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et s la symétrie orthogonale d'axe $(O; \vec{u})$.
On pose : $g = r \circ s$.
 - Déterminer l'écriture complexe de la transformation g .
 - Montrer que les points O et A sont invariants par g .
 - En déduire la nature de la transformation g .
- Montrer que l'on peut écrire $f = h \circ g$, où h est une homothétie de centre et de rapport à déterminer.
 - Sur la figure placée en ANNEXE, un point C est placé. Faire la construction de l'image C' de C par la transformation f .



- On considère les points A d'affixe 1 et B d'affixe i . On appelle S la réflexion (symétrie axiale) d'axe (AB) .
Montrer que l'image M' par S d'un point M d'affixe z a pour affixe :
 $z' = -i \cdot \bar{z} + 1 + i$

2. On note H l'homothétie de centre A et de rapport -2 . Donner l'écriture complexe de H .

3. On note f la composée $H \circ S$.

- Montrer que f est une similitude.
- Déterminer l'écriture complexe de f .

4. On appelle M' l'image d'un point M par f .

- Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM'} = -\overrightarrow{AM}$ est la droite (AB) .
- Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM}$ est la perpendiculaire en A à la droite (AB) .

Exercice 17



Le plan \mathcal{P} est rapporté à un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct.

On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

1. On considère les points A d'affixe 1 et B d'affixe i . On appelle S la réflexion (symétrie axiale) d'axe (AB) .

Montrer que l'image M' par S d'un point m d'affixe z a pour affixe :

$$z' = -i \cdot \bar{z} + 1 + i$$

2. On note H l'homothétie de centre A et de rapport -2 . Donner l'écriture complexe de H .

3. On note f la composée $H \circ S$.

- Montrer que f est une similitude.
- Déterminer l'écriture complexe de f .

4. On appelle M'' l'image d'un point M par f .

- Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{AM''} = -2 \cdot \overrightarrow{AM}$$
est la droite (AB) .
- Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{AM''} = 2 \cdot \overrightarrow{AM}$$
est la perpendiculaire en A à la droite (AB) .

6. Annales - Suites de points :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 18



Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique 4 cm).

Soit Ω le point d'affixe 2. On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport

$$\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1. On pose $\sigma = h \circ r$.

- Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

- Montrer que l'écriture complexe de σ est :

$$z \mapsto \frac{1+i}{2}z + 1 - i$$

- Soit M un point quelconque du plan d'affixe z . On désigne par M' son image par σ et on note z' l'affixe de M' . Montrer que :

$$z - z' = i \cdot (2 - z')$$

2. a. **Question de cours**

- Prérequis : définitions géométriques du module d'un nombre complexe et d'un argument d'un nombre complexe non nul. Propriétés algébriques modules et des arguments.

Démontrer que : si A est un point donné d'affixe a , alors l'image du point P d'affixe p par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est le point Q d'affixe q telle que : $q - a = i(p - a)$.

- Déduire des questions précédentes la nature du triangle $\Omega MM'$, pour M distinct de Ω .

3. Soit A_0 le point d'affixe $2 + i$. On considère la suite (A_n)

de points du plan définis par :

$$\text{pour tout entier naturel } n : A_{n+1} = \sigma(A_n).$$

- Montrer que, pour tout entier naturel n , l'affixe a_n de A_n est donnée par :

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i \frac{(n+2)\pi}{4}} + 2$$

- Déterminer l'affixe de A_5 .

4. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que l'on ait :

pour $n \geq n_0$, le point A_n est dans le disque de centre Ω et de rayon 0,01.

Exercice 19



Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique : 4 cm). Soit Ω le point d'affixe 2. On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et h l'homothétie

de centre Ω et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On pose : $\sigma = h \circ r$.

- Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

- Montrer que l'écriture complexe de 4σ est :

$$z \mapsto \frac{1+i}{2}z + 1 - i.$$

- Soit M un point quelconque du plan d'affixe z . On désigne par M' son image par σ et on note z' l'affixe de M' . Montrer que : $z - z' = i(2 - z')$

2. a. **Question de cours :**

Prérequis : définitions géométriques du module d'un nombre complexe et d'un argument d'un nombre complexe non nul. Propriétés algébriques des modules et des argu-

ments.

Démontrer que: si A est un point donné d'affixe a , alors l'image du point P d'affixe p par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est le point Q d'affixe q telle que: $q - a = i \cdot (p - a)$.

- b. Déduire des questions précédentes la nature du triangle $\Omega MM'$, pour M distinct de Ω .

3. Soit A_0 le point d'affixe $2 + i$. On considère la suite (A_n) de points du plan définis par:

pour tout entier naturel n : $A_{n+1} = \sigma(A_n)$.

- a. Montrer que, pour tout entier naturel n , l'affixe a_n de A_n est donnée par:

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot e^{i \cdot \frac{(n+2)\pi}{2}} + 2$$

- b. Déterminer l'affixe de A_5 .

4. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que l'on ait: pour $n \geq n_0$, le point A_n est dans le disque de centre Ω et de rayon 0,01.

7. Annales - Arithmétiques :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 20



1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soient A, B et C les points d'affixes respectives:

$$z_A = 2 + i \quad ; \quad z_B = 5 + 2i \quad , \quad z_C = i$$

s_1 désigne la symétrie d'axe (AB) .

- a. Démontrer que s_1 transforme tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' telle que:

$$z' = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right) \cdot \bar{z} + \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\right)$$

- b. En déduire l'affixe de C' , symétrique de C par rapport à (AB) .

- c. Démontrer que l'ensemble des points M tels que z' est imaginaire pur est la droite (\mathcal{D}) d'équation:

$$4x + 3y = 1$$

- d. Vérifier que le point C appartient à \mathcal{D} .

2. a. Démontrer que les droites (\mathcal{D}) et (AB) sont sécantes en un point Ω dont on précisera l'affixe ω .

- b. On désigne par s_2 la symétrie d'axe (\mathcal{D}) et par f la transformation définie par $f = s_2 \circ s_1$. Justifier que f est une similitude directe et préciser son rapport.

- c. Déterminer les images des points C et Ω par la transformation f .

- d. Justifier que f est une rotation dont on donnera le centre.

3. Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.

- a. Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x; y)$ solutions de l'équation:

$$4x + 3y = 1.$$

- b. Déterminer les points de (\mathcal{D}) à coordonnées entières dont la distance au point O est inférieure à 9.

Exercice 21



ABC est un triangle équilatéral tel que:

$$\left(\frac{\vec{AB}}{AB}; \frac{\vec{AC}}{AC}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k \cdot \pi \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

Soit t un nombre réel fixe et soient les points M, N et P , deux à deux distincts, définis par:

$$\vec{AM} = t \cdot \vec{AB} \quad ; \quad \vec{BN} = t \cdot \vec{BC} \quad ; \quad \vec{CP} = t \cdot \vec{CA}$$

Le but de l'exercice est de démontrer l'existence d'une unique similitude directe σ qui transforme les points A, B et C en respectivement M, N et P , et d'en préciser les éléments caractéristiques.

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ direct.

On note a, b, c, m, n et p , les affixes respectives des points A, B, C, M, N et P :

1. On rappelle que toute similitude conserve le barycentre.

- a. Exprimer m, n et p en fonction de a, b, c et t .

- b. En déduire que les deux triangles ABC et MNP ont même centre de gravité.

On notera G ce centre de gravité.

- c. On suppose que σ existe. Déterminer l'image de G par σ .

2. On considère la rotation r de centre G et d'angle $\frac{2 \cdot \pi}{3}$.

- a. Vérifier que M est le barycentre du système de points:

$$\{(A; 1-t); (B; t)\}$$

et, en déduire que: $r(M) = N$.

On admet de même que: $r(N) = P$; $r(P) = M$.

- b. Soit σ_1 , la similitude directe de centre G de rapport $\frac{GM}{GA}$ et d'angle $(\vec{GA}; \vec{GM})$.

Montrer qu'elle transforme les points A, B et C en respectivement M, N et P .

- c. Conclure sur l'existence et l'unicité de σ .

Exercice 22



Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fautive enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation:

$$x^2 - x + 4 \equiv 0 \pmod{6}$$

- a. Toutes les solutions sont des entiers pairs.

- b. Il n'y a aucune solution.

- c. Les solutions vérifient $x \equiv 2 \pmod{6}$
 d. Les solutions vérifient $x \equiv 2 \pmod{6}$ ou $x \equiv 5 \pmod{6}$.

2. On se propose de résoudre l'équation $(E) : 24x + 34y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.

- a. Les solutions de (E) sont toutes de la forme :
 $(x; y) = (34k - 7; 5 - 24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$
 b. L'équation (E) n'a aucune solution.
 c. Les solutions de (E) sont toutes de la forme :
 $(x; y) = (17k - 7; 5 - 12k)$ où $k \in \mathbb{Z}$
 d. Les solutions de (E) sont toutes de la forme :
 $(x; y) = (-7k; 5k)$ où $k \in \mathbb{Z}$

3. On considère les deux entiers $n = 1789$ et $p = 1789^{2005}$.
 On a alors :

- a. $n \equiv 4 \pmod{17}$ et $p \equiv 0 \pmod{17}$
 b. p est un entier premier.
 c. $p \equiv 4 \pmod{17}$
 d. $p \equiv 1 \pmod{17}$

4. On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, les points A et B d'affixes respectives a et b . Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hypoténuse $[AB]$ si, et seulement, si le point M d'affixe z est tel que :

- a. $z = \frac{b - ia}{1 - i}$ b. $a - z = i(b - z)$
 c. $z - a = e^{i\frac{\pi}{4}}(b - a)$ d. $b - z = \frac{\pi}{2}(a - z)$

5. On considère dans le plan orienté deux points distincts

A et B ; on note I le milieu du segment $[AB]$. Soit f la similitude directe de centre A , de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A , de rapport $\frac{1}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$; soit h la symétrie centrale de centre I

- a. $h \circ g \circ f$ transforme A en B et c'est une rotation.
 b. $h \circ g \circ f$ est la réflexion ayant pour axe la médiatrice du segment $[AB]$.
 c. $h \circ g \circ f$ n'est pas une similitude.
 d. $h \circ g \circ f$ est la translation de vecteur \overrightarrow{AB} .

Exercice 23



Pour chacune des six affirmations, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant le choix effectué.

- Le PGCD de 2004 et 4002 est 6.
- Si p et q sont deux entiers naturels non nuls, $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$ et $2^q - 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^n - 1$ n'est jamais divisible par 9.
- L'ensemble des couples d'entiers solutions de l'équation :
 $24x + 35y = 9$
 est l'ensemble des couples :
 $(-144 + 70k; 99 - 24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$
- Soient A et B deux points distincts du plan; si on note f l'homothétie de centre A et de rapport 3 et g l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{3}$ alors $g \circ f$ est la translation de vecteur \overrightarrow{AB} .
- Soit s la similitude d'écriture complexe $z' = i\bar{z} + (1 - i)$, l'ensemble des points invariants de s est une droite.

8. Similitudes :

Exercice 24



On démontrera sans démonstration les deux propriétés suivantes :

- Propriété 1 :** Toute similitude indirecte qui transforme un point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' admet une expression complexe de la forme :
 $z' = a \cdot \bar{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

- Propriété 2 :** Soit C un point d'affixe c . Pour tout point D , distinct de C , d'affixe d et pour tout point E , distinct de C , d'affixe e , on a :
 $(\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CE}) = \arg\left(\frac{e - c}{d - c}\right) [2 \cdot \pi]$

Question : Montrer qu'une similitude indirecte transforme un angle orienté en son opposé.

Exercice 25



On suppose connu le résultat suivant :

Une application f du plan muni d'un repère orthonormé direct dans lui-même est une similitude directe si, et seulement si, f admet une écriture complexe de la forme :

$$z' = a \cdot z + b \quad \text{où } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}.$$

Démonstration de cours : on se place dans le plan complexe. Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points tels que A est distinct de B et A' est distinct de B' , alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B' .

Exercice 26



Question de cours :

Prérequis : définitions géométriques du module d'un complexe et d'un argument d'un nombre complexe non nul. Propriétés algébriques des modules et des arguments.

Démontrer que : si A est un point donné d'affixe a , alors l'image du point P d'affixe p par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est le point Q d'affixe q telle que : $q - a = i(p - a)$.

10. Exercices non-classés :

Exercice 27

On considère l'équation : $(E) : 3 \cdot x - 2 \cdot y = 1$

1.
 - a. Montrer que le couple $(-1; -2)$ est une solution de (E) .
 - b. Déterminer tous les couples $(x; y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation (E) .
2. Soient d et d' les droites d'équations respectives :
 $y = 2 \cdot x + 4$; $3 \cdot x - 2 \cdot y = 1$
 - a. Vérifier que pour tout entier relatif k , le point A_k de coordonnées $(k-3; 2 \cdot k-2)$ appartient à la droite d .
 On admettra que ce sont les seuls points de d à coordonnées entières.
 - b. Montrer que les seuls points de d' à coordonnées entières sont les points $B_{k'}$ de coordonnées :
 $(2 \cdot k' - 1; 3 \cdot k' - 2)$ où $k' \in \mathbb{Z}$.
3.
 - a. Existe-t-il deux entiers relatifs k et k' tels que :
 $A_k = B_{k'}$?
 - b. Déterminer les entiers relatifs k et k' tels que le segment $[A_k B_{k'}]$ soit parallèle à l'axe des abscisses.
 - c. Trouver l'entier q tel que : $\overrightarrow{A_{3q} B_{2q}} = 4 \cdot \vec{u}$
4. Soit Ω un point quelconque du plan dont l'affixe est notée ω . On note H le milieu du segment $[A_6 B_4]$.

On désigne par f la similitude directe de centre Ω , de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

- a. Donner l'écriture complexe de la similitude f .
- b. Déterminer l'affixe du point Ω pour que l'image du point H soit l'origine O du repère.

Exercice 28

Soit un triangle équilatéral direct ABC et soit D un point du segment $[BC]$. La parallèle à la droite (AC) menée par D coupe la droite (AB) en E et la parallèle à la droite (AB) menée par D coupe la droite (AC) en F .

Soit le point G , centre de gravité du triangle ABC et les points H et A' , symétriques de G et A par rapport à la droite (BC) .

On définit les points I et J centres de gravité respectifs des triangles BDE et CDF .

On définit les similitudes directes S_1 , de centre C , de rapport $\sqrt{3}$, d'angle $\frac{\pi}{6}$ et S_2 , de centre B , de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$, d'angle $\frac{\pi}{6}$

et leur composée : $f = S_2 \circ S_1$

1. Déterminer les images de J et H par f .
2. Déterminer la nature et des éléments caractéristiques de f .
3. En déduire la nature du triangle HIJ .