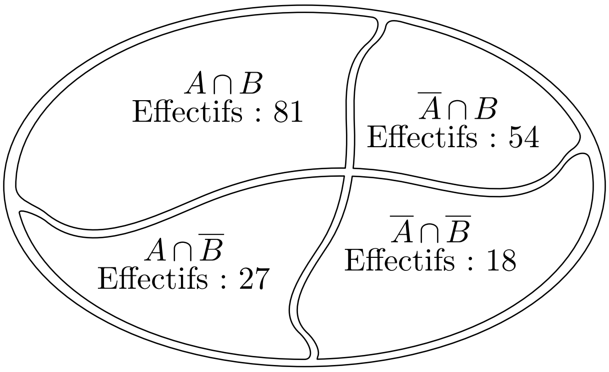
Hors programme lycée/Probabilité conditionnelle

1. Introduction aux probabilités conditionnelles :

Exercice 1

Dans une expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B qui réalise la partition de l'univers représentée ci-dessous :



1. Déterminer les probabilités suivantes :

   a. $\mathcal{P}(A)$ b. $\mathcal{P}(\overline{B})$ c. $\mathcal{P}(A \cap \overline{B})$

2. On modifie l'expérience aléatoire en ne considérant que l'univers constitué de l'évènement A. On note $\mathcal{P}'$ la nouvelle probabilité sur A. Déterminer la probabilité suivante :
   $\mathcal{P}'(B)$

3. De même, on ne considère que les évènements issus de $\overline{B}$ et on note $\mathcal{P}''$ la probabilité sur cet univers. Déterminer la probabilité suivante : $\mathcal{P}''(\overline{A})$

2. Calcul de probabilité conditionnelle :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 2

Un serveur, travaillant dans une pizzeria, remarque qu'en moyenne, 40 % des clients sont des familles, 25 % des clients sont des personnes seules et 35 % des clients sont des couples.

Il note aussi que :

- 70 % des familles laissent un pourboire ;
- 90 % des personnes seules laissent un pourboire ;
- 40 % des couples laissent un pourboire.

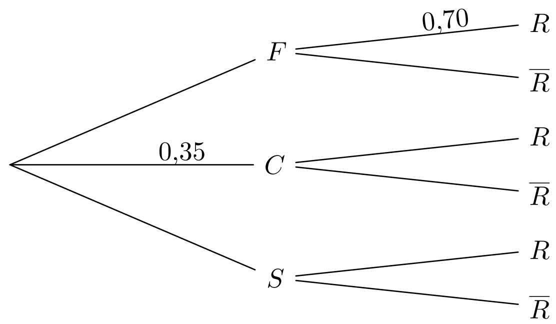
Un soir donné, ce serveur prend au hasard une table occupée dans la pizzeria.
On s'intéresse aux évènements suivants :

- F : "*la table est occupée par une famille*"
- S : "*la table est occupée par une personne seule*"
- C : "*la table est occupée par un couple*"
- R : "*le serveur reçoit un pourboire*"

On note $\overline{A}$ l'évènement contraire de A et $p_B(A)$ la probabilité de A, sachant B.

1. D'après les données de l'énoncé, préciser les probabilités $p(F)$ et $p_S(R)$.

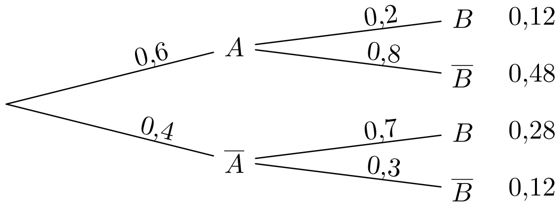
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



3. Calculer $p(F \cap R)$

Exercice 3

Dans une expérience aléatoire, on considère les deux évènements A et B. L'étude de cet expérience aléatoire a permis de produire l'arbre de probabilité ci-dessous :



Donner, si possible, par lecture de l'arbre les probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}(A)$ b. $\mathcal{P}(\overline{A} \cap B)$ c. $\mathcal{P}(A \cap \overline{B})$

d. $\mathcal{P}_B(\overline{A})$ e. $\mathcal{P}_A(B)$ f. $\mathcal{P}_{\overline{A}}(B)$

3. Probabilité conditionnelle et construction d'abre :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 4

Une agence de location de voitures dispose de trois types de véhicules : berline, utilitaire ou luxe, et propose, au moment de la location, une option d'assurance sans franchise.
Une étude statistique a permis d'établir que :

- 30 % des clients ont loué une berline et 10 % ont loué un véhicule de luxe.
- 40 % des clients qui ont loué une berline ont choisi l'option d'assurance sans franchise.
- 9 % des clients ont loué un véhicule de luxe et ont choisi l'option d'assurance sans franchise.
- 21 % des clients ont loué un véhicule utilitaire et ont choisi l'option d'assurance sans franchise.

On prélève au hasard la fiche d'un client et on considère les évènements suivants :

- B : le client a loué une berline.
- L : le client a loué un véhicule de luxe.
- U : le client a loué un véhicule utilitaire.
- A : le client a choisi l'option d'assurance sans franchise.

Produire un arbre de probabilités représentant la situation ci-dessus et intégrant les données de l'énoncé.

4. Formule des probabilités totales :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 5

A une sortie d'autoroute, la gare de péage comporte trois voies.
Une étude statistique a montré que :

- 28 % des automobilistes empruntent la voie de gauche, réservée aux abonnées ; un automobiliste empruntant cette voie franchit toujours le péage en moins de 10 secondes ;
- 52 % des automobilistes empruntent la voie du centre, réservée au paiement par carte bancaire ; parmi ces derniers, 75 % franchissent le péage en moins de 10 secondes ;
- les autres automobilistes empruntent la voie de droite en utilisant un autre moyen de paiement *(pièces ou billets)*.

On choisit un automobiliste au hasard et on considère les évènements suivants :

- G : *"l'automobiliste emprunte la voie de gauche"* ;
- C : *"l'automobiliste emprunte la voie du centre"* ;
- D : *"l'automobiliste emprunte la voie de droite"* ;
- T : *"l'automobiliste franchit le péage en moins de 10 secondes"*.

On note $\overline{T}$ l'évènement contraire de l'évènement T.

1. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation. Cette arbre sera complété au fur et à mesure de l'exercice.
2. Calculer la probabilité $p(C \cap T)$.
3. L'étude a aussi montré que 70 % des automobilistes passent le péage en moins de 10 secondes.
   a. Justifier que $p(D \cap T) = 0{,}03$.
   b. Calculer la probabilité qu'un automobiliste empruntant la voie de droite passe le péage en moins de 10 secondes.

Exercice 6

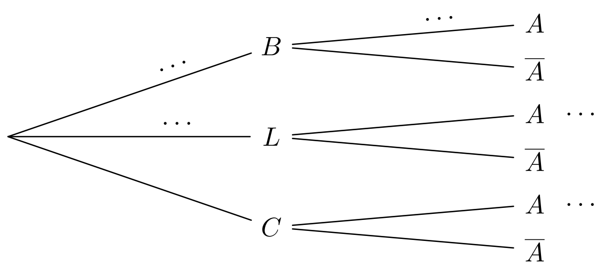
Une agence de location de voitures dispose de trois types de véhicules : berline, utilitaire ou luxe, et propose, au moment de la location, une option d'assurance sans franchise.
Une étude statistique a permis d'établir que :

- 30 % des clients ont loué une berline et 10 % ont loué un véhicule de luxe.
- 40 % des clients qui ont loué une berline ont choisi l'option d'assurance sans franchise.
- 9 % des clients ont loué un véhicule de luxe et ont choisi l'option d'assurance sans franchise.
- 21 % des clients ont loué un véhicule utilitaire et ont choisi l'option d'assurance sans franchise.

On prélève au hasard la fiche d'un client et on considère les évènements suivants :

- B : le client a loué une berline.
- L : le client a loué un véhicule de luxe.
- U : le client a loué un véhicule utilitaire.
- A : le client a choisi l'option d'assurance sans franchise.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre avec les données de l'énoncé.



2. Quelle est la probabilité que le client ait loué une berline et ait choisi l'option d'assurance sans franchise?
3. Calculer la probabilité qu'un client ait choisi l'option d'assurance sans franchise.
4. Calculer $\mathcal{P}_L(A)$, la probabilité que le client ait souscrit une assurance sans franchise sachant qu'il a loué une voiture de luxe.

5. Inversion de la condition :

(+6 exercices pour les enseignants)

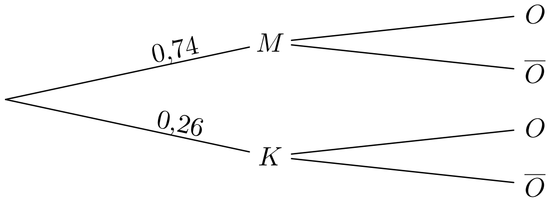
Exercice 7

D'après une étude récente, il y a 216 762 médecins en France métropolitaine parmi lesquels 0,6 % pratiquent l'osthéopathie et on compte 75 164 kinésithérapeutes parmi lesquels 8,6 % pratiquent l'osthéopathie.

On choisit une personne au hasard parmi les médecins et les kinésithérapeutes.
On note les évènements suivants :

- M : "*la personne choisie est médecin*" ;
- K : "*la personne choisie est kinésithérapeute*" ;
- O : "*la personne choisie pratique l'ostéopathie*".

On représente la situation à l'aide de l'arbre pondéré suivant :



1. Reproduire l'arbre de probabilité puis le compléter.
2. Montrer que la probabilité $\mathcal{P}(O)$ est égale à 0,026 8.
3. Un patient vient de suivre une séance d'ostéopathie chez un praticien d'une des deux catégories.
   Détermine la probabilité que le praticien soit un kinésithérapeute. Donner le résultat arrondi au centième.

Exercice 8

On s'intéresse à l'ensemble des demandes de prêts immobiliers auprès de trois grandes banques.
Une étude montre que 42 % des demandes de prêts sont déposées auprès de la banque Karl, 35 % des demandes de prêts sont déposées auprès de la banque Lofa, alors que cette proportion est de 23 % pour la banque Miro.

Par ailleurs :

- 76 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Karl sont acceptées ;
- 65 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Lofa sont acceptées ;
- 82 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Miro sont acceptées.

On choisir au hasard une demande de prêt immobilier parmi celles déposées auprès des trois banques.
On considère les évènements suivants :

- K : "*la demande de prêt a été déposée auprès de la banque Karl*" ;
- L : "*la demande de prêt a été déposée auprès de la banque Lofa*" ;
- M : "*la demande de prêt a été déposée auprès de la banque Miro*" ;
- A : "*la demande de prêt est acceptée.*"

Dans tout l'exercice, on donnera, si nécessaire, des valeurs approchées au millième des résultats.

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Calculer la probabilité que la demande de prêt soit déposée auprès de la banque Karl et soit acceptée.
3. Montrer que : $\mathcal{P}(A) \approx 0{,}735$
4. La demande de prêt est acceptée. Calculer la probabilité qu'elle ait été déposée à la banque Miro.

Exercice 9

Un centre de loisirs destiné aux jeunes de 11 ans à 18 ans compte 60 % de collégiens et 40 % de lycéens.

Le directeur a effectué une étude statistique sur la possession de téléphones portables. Cette étude a montré que 80 % des jeunes possèdent un téléphone portable et que, parmi les collégiens, 70 % en possèdent un.

On choisit au hasard un jeune du centre de loisirs et on s'intéresse aux évènements suivants :

- C : "*le jeune choisi est un collégien*" ;
- L : "*le jeune choisi est un lycéen*" ;
- T : "*le jeune choisi possède un téléphone portable*".

> *Rappel des notations :*
> Si A et B sont deux évènements, $p(A)$ désigne la probabilité que l'évènement A se réalise et $p_B(A)$ désigne la probabilité de A sachant que l'évènement B est réalisé.
> On note aussi $\overline{A}$ l'évènement contraire de A.

1. Donner les probabilités : $p(C)$, $p(L)$, $p(T)$, $p_C(T)$.
2. Faire un arbre de probabilités représentant la situation et commencer à la renseigner avec les données de l'énoncé.
3. Calculer la probabilité que le jeune choisi soit un collégien possédant un téléphone portable.
4. Calculer la probabilité que le jeune choisi soit un collégien sachant qu'il possède un télélphone portable.
5. (a.) Calculer $p(T \cap L)$, en déduire $p_L(T)$.
   (b.) Compléter l'arbre construit dans la question 2..

Exercice 10

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.

La proportion de composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.

On note :

- D : l'évènement "*le composant est défectueux*" ;
- F_1 : l'évènement "*le composant provient du premier fournisseur*" ;
- F_2 : l'évènement "*le composant provient du second fournisseur*".

1. Dresser un arbre de probabilité correspondant à cette situation.
2. Calculer $P(D \cap F_1)$, puis démontrer : $P(D) = 0{,}022\,5$

3. Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur? On arrondiera sa valeur au millième près.

8. Répétitions indépendantes d'expériences aléatoires : *(+1 exercice pour les enseignants)*

Exercice 11

Une urne contient 50 boules blanches, 25 boules noires et 25 boules rouges. L'expérience élémentaire consiste à tirer une boule. Les boules ont toutes la même probabilité d'être tirées. On effectue 3 tirages indépendants et avec remise.

1. Déterminer la probabilité de l'évènement :
A : "*les trois boules tirées sont blanches*".

2. Déterminer la probabilité de l'évènement :
B : "*aucune des boules tirées est blanches*".

3. a. Déterminer la probabilité de l'évènement :
C_1 : "*La première boule tirée est blanche ; les deux autres ne sont pas blanches*".

b. En déduire la probabilité de l'évènement :
C : "*une seule des boules tirées est blanches*".

4. En déduire la probabilité de l'évènement :
D : "*deux boules tirées sont blanches et une boule n'est n'est pas blanche*".

5. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées :

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

b. Déterminer l'espérance de la variable $\mathcal{X}$.