Hors programme lycée/Matrice

1. Formule du binome de Newton :

Exercice 5130

On considère les deux matrices :

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad ; \quad A=\begin{pmatrix}0&2&5\\0&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

1. Déterminer pour tout entier naturel, l'expression des puissances I^n et A^n.
2. En déduire l'expression de la matrice $\big(I+A\big)^5$.

Exercice 5162

On considère la matrice A définie par : $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}$

Cet exercice a pour but de donner une expression de A^n pour tout entier naturel n.

1. On considère la matrice B définie par $B=A-I_3$. Donner l'expression de B^2 et B^3.
2. a. Peut-on utiliser la formule du binôme de Newton pour développer l'expression $\big(I_3+B\big)^n$ pour n entier naturel non-nul? Justifier votre réponse.

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :
   $$A^n=\binom{n}{0}\cdot I_3+\binom{n}{1}\cdot B+\binom{n}{2}\cdot B^2$$

Exercice 5163

On considère les deux matrices A et D définie par :

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&2\\0&-1&-2\\0&0&-1\end{pmatrix}\quad ; \quad D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Cet exercice a pour but de donner une expression de A^n pour tout entier naturel n.

1. On considère la matrice B définie par $B=A-D$. Donner l'expression de B^2 et B^3.
2. a. Peut-on utiliser la formule du binôme de Newton pour développer l'expression $\big(D+B\big)^n$ pour n entier naturel non-nul? Justifier votre réponse.

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :
   $$A^n=(-1)^n\cdot\binom{n}{0}\cdot I_3+(-1)^{n-1}\cdot\binom{n}{1}\cdot B+(-1)^{n-2}\cdot\binom{n}{2}\cdot B^2$$

Exercice 5131

On considère la matrice A définie par :

$$A=\begin{pmatrix}3&1&2\\0&3&-1\\0&0&3\end{pmatrix}$$

1. Ecrire la matrice A sous la forme $B+C$ où B est une matrice diagonale carrée.
2. a. Pour tout entier n, donner l'expression de C^n.

   b. Vérifier que les matrices B et C sont commutatives.

   c. Etablir l'égalité suivante pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :
   $$A^n=B^n+n\cdot C\cdot B^n+\binom{n}{2}\cdot C^2\cdot B^{n-2}$$

2. Formule du binome de Newton et suites :

Exercice 5164

Considérons la matrice A carrée de dimension 3 définie par :

$$A=\begin{pmatrix}2&0&3\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

1. On considère la suite $\big(u_n\big)$ définie par :
   $u_0=0\quad ; \quad u_{n+1}=2\cdot u_n+3\times 2^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

   Etablir que pour tout entier n, on a :
   $$A^n=\begin{pmatrix}2^n&0&u_n\\0&1&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}$$
2. On considère les deux matrices D et S définies par :
   $$D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\quad ; \quad S=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

   a. Montrer que : $D\cdot S=S\cdot D$.

   b. Montrer que pour tout $k\geqslant 2$, on a : $S^k=0_3$.

   c. A l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer l'expression de A^n pour tout entier naturel non-nul.
3. En déduire la formule explicite de la suite $\big(u_n\big)$.

3. Matrices et nombres complexes :

Exercice 5447

On considère la matrice carrée A d'ordre 2 définie par :
$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$
On considère les matrices P et Q définies par :
$$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i}\end{pmatrix}\quad ;\quad Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{i} & -\frac{1}{2}\cdot\mathrm{i}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\mathrm{i} & \frac{1}{2}\cdot\mathrm{i}\end{pmatrix}$$
où i est le nombre complexe vérifiant : $\mathrm{i}^2=-1$.

1. Montrer que les matrices P et Q sont inverses l'une de l'autre.
2. Montrer que la matrice $P^{-1}\cdot A\cdot P$ est une matrice diagonale. On note D cette matrice diagonale dans le reste de l'exercice.
3. a. Etablir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, la relation suivante pour tout entier naturel n :
$A^n=P\cdot D^n\cdot P^{-1}$
   b. Justifier que pour tout entier n, on a la relation $A^{n+4}=A^n$

4. Matrice diagonalisable :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 5161

On considère les matrice A et P définies par :
$$A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ -6 & -4\end{pmatrix}\quad ;\quad P=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice P est une matrice inversible et donner l'expression de la matrice P^{-1}.
2. a. Etablir l'existence d'une matrice D vérifiant l'égalité :
$A=P\cdot D\cdot P^{-1}$
   b. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir que pour tout entier naturel n, on a l'égalité :
$A^n=P\cdot D^n\cdot P^{-1}$
   c. En déduire, pour tout entier naturel n non-nul, l'expression de A^n.

Exercice 5160

On considère les matrice A et P définies par :
$$A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}\quad ;\quad P=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice P est une matrice inversible et donner l'expression de la matrice P^{-1}.
2. a. Etablir l'égalité suivante :
$$A=P\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot P^{-1}$$
   b. En déduire, pour tout entier naturel n non-nul, l'expression de A^n.

Exercice 5158

On considère la matrice A définie par :
$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ -2 & -4 & 3\end{pmatrix}$$
et les deux matrices P et Q définies par :
$$P=\begin{pmatrix}1 & -3 & -2\\ -1 & 1 & 1\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix}\quad ;\quad Q=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & -4 & 1\\ 3 & 7 & -2\end{pmatrix}$$

1. Montrer que les matrices P et Q sont deux matrices inverses l'une de l'autre.
2. On note D la matrice définie par : $I=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
   a. Etablir l'égalité : $A=P\cdot D\cdot Q$
   b. Etablir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :
$A^n=P\cdot D^n\cdot Q$
   c. En déduire, pour tout entier naturel n non-nul, l'expression de la matrice A^n.

Exercice 5159

On considère la matrice A définie par :
$$A=\begin{pmatrix}-2 & -1 & -3\\ -7 & 4 & -9\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$
et les deux matrices P et Q définies par :
$$P=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\quad ;\quad Q=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -5\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

1. Montrer que les matrices P et Q sont deux matrices inverses l'une de l'autre.
2. Etablir l'existence d'une matrice D vérifiant l'égalité :
$A=P\cdot D\cdot Q$
et admettant pour expression :
$$D=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}\quad \text{où } a,\ b,\ c \text{ sont trois réels}$$

3. a. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir que pour tout entier naturel n, on a l'égalité :
$A^n = P \cdot D^n \cdot Q$

b. En déduire, pour tout entier naturel n non-nul, l'expression de la matrice A^n.

Exercice 5146

On considère la matrice A carrée de dimension 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 4 & -5 & -2 \\ 2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Le but de l'exercice est de déterminer une expression de la matrice A^n pour tout entier naturel n.

Pour cela, on considère les deux matrices carrées P et Q :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les matrices P et Q sont deux matrices inverses l'une de l'autre.

2. Etablir l'égalité : $A = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot Q$

On note D la matrice : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. a. Donner l'expression de la matrice D^n où n est un entier naturel.

b. Etablir pour tout entier naturel n, l'égalité :
$A^n = P \cdot D^n \cdot Q$

c. Donner l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice 5356

On considère les deux matrices de dimensions 2 :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. a. Justifier que la matrice P est une matrice inversible.

b. Donner l'expression de la matrice P^{-1} inverse de la matrice P.

2. Déterminer la valeur des réels α et β réalisant l'égalité suivante :
$$A = P \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

3. a. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'égalité suivante pour tout entier naturel n :
$$A^n = P \cdot \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

b. Donner l'expression de A^n en fonction de n.

5. *Rappels sur les systèmes :*

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 6118

Dans un café, voici deux commandes et le montant de leur facture :

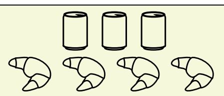

Facture : 4,5 €.

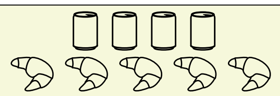

Facture : 10,8 €

Dans ce café, quels sont les prix d'un croissant et d'un café?

Exercice 6119

Dans un café, voici deux commandes et le montant de leur facture :

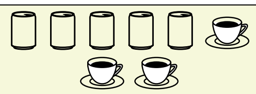

Facture : 11 €.


Facture : 14,3 €

Dans ce café, quels sont les prix d'un croissant et d'une canette?

Exercice 6120

Dans un café, voici deux commandes et le montant de leur facture :


Facture : 15,2 €.


Facture : 10 €

Quels sont les prix, dans ce café, d'un café et d'une canette?

Exercice 6121

1. Résoudre par la méthode de combinaisons linéaires le système suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcl} 3x & + & 2y & = & 5 \\ 4x & + & 3y & = & 3 \end{array} \right.$$

2. Résoudre par la méthode de la substitution le système suivant :

$$(T) : \left\{ \begin{array}{rcrcl} 3x & + & y & = & 16 \\ 8x & - & 5y & = & 12 \end{array} \right.$$

255. *Exercices non-classés :*

Exercice 5392

On considère un processus évolutif admettant la matrice de transition suivante :

$$T = \begin{pmatrix} \dfrac{7}{10} & -\dfrac{3}{10} \\ \dfrac{1}{5} & \dfrac{1}{5} \end{pmatrix}$$

1. On considère la matrice P définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que la matrice P est une matrice inversible et déterminer l'expression de sa matrice inverse.

b. Déterminer l'existence d'une matrice D diagonale vérifiant l'égalité : $T = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

c. Etablir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, la relation suivante pour tout entier naturel n :

$$T^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$$

d. En déduire l'expression de la matrice T^n en fonction de l'entier naturel n.

2. On considère les deux suites $\big(a_n\big)$ et $\big(b_n\big)$ de premiers termes respectifs a_0 et b_0 et vérifiant la relation :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

a. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'égalité suivante pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = T^n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

b. Déterminer une expression des termes de ces deux suites en fonction de n, a_0 et b_0

c. En déduire la limite de ces deux suites.

