# Hors programme lycée/Loi continue

## 1. Loi normale centrée réduite :

*(+2 exercices pour les enseignants)*

### Exercice 5468

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$$

1. A l'aide de la calculatrice de la calculatrice, déterminer les valeurs approchées au millième des intégrales suivantes :

   a. $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ b. $\int_{-2}^{2} f(t)\,dt$ c. $\int_{-3}^{3} f(t)\,dt$

   d. $\int_{-4}^{4} f(t)\,dt$ e. $\int_{-5}^{5} f(t)\,dt$ f. $\int_{-9}^{9} f(t)\,dt$

2. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur de la limite suivante :

   $$\lim_{x \mapsto +\infty} \int_{-x}^{x} f(t)\,dt$$

### Exercice 5467

On considère une variable aléatoire suivant une loi de probabilité $\mathcal{N}(0\,;1)$. A l'aide de la calculatrice, donner les valeurs des probabilité suivantes arrodies au millième :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant -1)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant 2)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geqslant 1)$

### Exercice 2654

On considère une variable aléatoire suivant une loi de probabilité $\mathcal{N}(0\,;1)$. A l'aide de la calculatrice, donner les valeurs des probabilités suivantes arrondies au millième :

a. $\mathcal{P}(-2 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 3)$ b. $\mathcal{P}(0 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 2)$ c. $\mathcal{P}(-4 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 4)$

### Exercice 5471

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale centrée réduite *($\mathcal{N}(0\,;1)$)*. On donne la valeur approchée de la probabilité suivante :

$$\mathcal{P}\Big(\mathcal{X} \leqslant \frac{1}{2}\Big) \approx 0{,}691$$

Sans la calculatrice, déterminer la valeur des probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}\Big(0 \leqslant \mathcal{X} \leqslant \frac{1}{2}\Big)$ b. $\mathcal{P}\Big(-\frac{1}{2} \leqslant \mathcal{X} \leqslant 0\Big)$ c. $\mathcal{P}\Big(\mathcal{X} \leqslant -\frac{1}{2}\Big)$

### Exercice 7580

On considère la variable aléatoire centrée et réduite *($\mathcal{N} \sim \mathcal{N}(0\ 1)$)*. Quelle est la probabilité que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ ait une valeur inférieure à 0,5 sachant qu'elle a une valeur inférieure à 2?

- 0,706
- 0,707
- 0,708
- 0,709

## 2. Loi normale inverse centrée réduite :

*(+1 exercice pour les enseignants)*

### Exercice 5469

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

Pour chaque question et à l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur de $a$ approchée au millième vérifiant les égalités :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant a) = 0{,}3$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant a) = 0{,}5$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant a) = 0{,}68$

## 3. Loi normale et loi normale centrée réduite :

### Exercice 5483

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètre $\mu$ et $\sigma^2$ *($\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$)*. On note $\mathcal{Z}$ une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite *($\mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0\,;1)$)*.

En centrant et en réduisant la variable aléaoitre $\mathcal{X}$, établir l'égalité :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant \mu) = 0{,}5$$

### Exercice 5478

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres 3 et 4 *($\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(3\,;4)$)* et $\mathcal{Z}$ une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite *($\mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0\,;1)$)*

1. Exprimer les probabilités ci-dessous en fonction de la variable aléatoire $\mathcal{Z}$ :

   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geqslant 2)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X} < -2)$ c. $\mathcal{P}(-2 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 3)$

2. A l'aide du tableau ci-dessous et en laissant les traces de votre démarche, déterminer les probabilités de la question 1..

| $t_1 \backslash t_2$ | 0,00 | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 |
|---|---|---|---|---|---|
| -3,00 | 0,0013 | 0,0016 | 0,0019 | 0,0022 | 0,0026 |
| -2,75 | 0,003 | 0,0035 | 0,004 | 0,0047 | 0,0054 |
| -2,50 | 0,0062 | 0,0071 | 0,0082 | 0,0094 | 0,0107 |
| -2,25 | 0,0122 | 0,0139 | 0,0158 | 0,0179 | 0,0202 |
| -2,00 | 0,0228 | 0,0256 | 0,0287 | 0,0322 | 0,0359 |
| -1,75 | 0,0401 | 0,0446 | 0,0495 | 0,0548 | 0,0606 |
| -1,50 | 0,0668 | 0,0735 | 0,0808 | 0,0885 | 0,0968 |
| -1,25 | 0,1056 | 0,1151 | 0,1251 | 0,1357 | 0,1469 |
| -1,00 | 0,1587 | 0,1711 | 0,1841 | 0,1977 | 0,2119 |
| -0,75 | 0,2266 | 0,242 | 0,2578 | 0,2743 | 0,2912 |
| -0,50 | 0,3085 | 0,3264 | 0,3446 | 0,3632 | 0,3821 |
| -0,25 | 0,4013 | 0,4207 | 0,4404 | 0,4602 | 0,4801 |
| 0,00 | 0,5 | 0,5199 | 0,5398 | 0,5596 | 0,5793 |
| 0,25 | 0,5987 | 0,6179 | 0,6368 | 0,6554 | 0,6736 |
| 0,50 | 0,6915 | 0,7088 | 0,7257 | 0,7422 | 0,758 |
| 0,75 | 0,7734 | 0,7881 | 0,8023 | 0,8159 | 0,8289 |
| 1,00 | 0,8413 | 0,8531 | 0,8643 | 0,8749 | 0,8849 |
| 1,25 | 0,8944 | 0,9032 | 0,9115 | 0,9192 | 0,9265 |
| 1,50 | 0,9332 | 0,9394 | 0,9452 | 0,9505 | 0,9554 |
| 1,75 | 0,9599 | 0,9641 | 0,9678 | 0,9713 | 0,9744 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9798 | 0,9821 | 0,9842 | 0,9861 |
| 2,25 | 0,9878 | 0,9893 | 0,9906 | 0,9918 | 0,9929 |
| 2,50 | 0,9938 | 0,9946 | 0,9953 | 0,996 | 0,9965 |
| 2,75 | 0,997 | 0,9974 | 0,9978 | 0,9981 | 0,9984 |

$\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant t_1+t_2\big)$ $\quad$ $\mathcal{X}\sim\mathcal{N}\big(0\,;1\big)$

## *4. Loi normale :*

*(+2 exercices pour les enseignants)*

### Exercice 5473

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale de paramètre 10 et 9 . *($\mathcal{X}\sim\mathcal{N}(10\,;9)$).*

1. Donner l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
2. A l'aide de la calculatrice, déterminer les probabilités suivantes arrondies au millième près :

   a. $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant 9\big)$ $\quad$ b. $\mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant 12\big)$

### Exercice 5479

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale de paramètres $-3$ et 5 *($\mathcal{X}\sim\mathcal{N}(-3\,;5)$).*

1. Donner la moyenne, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
2. Sans l'aide de la calculatrice, parmi les probabilités ci-dessous, lesquelles ont une valeur strictement supérieure à 0,5 :

   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 0)$ $\quad$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 2)$ $\quad$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}>-4)$

### Exercice 6960

La société "*Bonne Mamie*" utilise une machine pour remplir à la chaîne des pots de confiture. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui à chaque pot de confiture produit associe la masse de confiture qu'il contient exprimée en grammes.

Dans le cas où la machine est correctement réglée, on admet que $\mathcal{X}$ suit une loi normale de moyenne $\mu=125$ et d'écart-type $\sigma=2$.

On estime qu'un pot de confiture est conforme lorsque la masse de confiture qu'il contient est comprise entre 120 et 130 grammes.

On choisit au hasard un pot parmi ceux qui ont une masse de confiture inférieure à 130 grammes. Quelle est la probabilité que ce pot ne soit pas conforme? On donnera le résultat arrondi à $10^{-4}$.

## *5. Loi normale : intervalle et écart-type :*

### Exercice 5481

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres $-2$ et 4. *($\mathcal{X}\sim\mathcal{N}(-2\,;4)$).*

Sans calculatrice, donner la valeur approchée au centième des probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}\big(-4\leqslant\mathcal{X}\leqslant 0\big)$ $\quad$ b. $\mathcal{P}\big(-6\leqslant\mathcal{X}\leqslant 2\big)$ $\quad$ c. $\mathcal{P}\big(-8\leqslant\mathcal{X}\leqslant 4\big)$

## 6. Loi normale : détermination d'un intervalle :

*(+1 exercice pour les enseignants)*

**Exercice 5480**

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètre 2 et 9. *($\mathcal{X}\sim\mathcal{N}(2;9)$).*

On répondra aux questions à l'aide de la calculatrice :

1. Déterminer une valeur approchée au centième du réel $x$ vérifiant l'égalité : $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant x\big)=0{,}24$

2. Déterminer une valeur approchée au centième du réel $x$ vérifiant l'égalité : $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\geqslant x\big)=0{,}7$

3. Déterminer une valeur approchée au centième du réel $x$ vérifiant l'égalité : $\mathcal{P}\big(2-x\leqslant\mathcal{X}\leqslant 2+x\big)=0{,}5$

*Exprimer ces conditions sous la forme $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant x\big)$*

## 7. Loi normale : recherche d'un paramètre :

*(+2 exercices pour les enseignants)*

**Exercice 5512**

L'entreprise *Fructidoux* fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination "*compote allégée*".

La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est à dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la prodution, associe sa teneur en sucre.

On suppose que $\mathcal{X}$ suit une loi normale d'espérance $m=0{,}17$ et d'écart-type $\sigma$.

On suppose de plus que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production soit conforme est égale à 0,99.

Soit $\mathcal{Z}$ la variable aléatoire définie par : $\mathcal{Z}=\dfrac{\mathcal{X}-m}{\sigma}$.

1. Quelle loi la variable aléatoire $\mathcal{Z}$ suit-elle?

2. Déterminer, en fonction de $\sigma$ l'intervalle auquel appartient $\mathcal{Z}$ lorsque $\mathcal{X}$ appartient à l'intervalle $\big[0{,}16\,;0{,}18\big]$.

3. En déduire une valeur approchée à $10^{-3}$ près de $\sigma$.

On pourra utiliser la tableau ci-dessous, dans lequel la variable aléatoire $\mathcal{Z}$ suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

| $\mathcal{P}\big(-\beta\leqslant\mathcal{Z}\leqslant\beta\big)$ | $\beta$ |
|---|---|
| 0,985 | 2,4324 |
| 0,986 | 2,4573 |
| 0,987 | 2,4838 |
| 0,988 | 2,5121 |
| 0,989 | 2,5427 |

| $\mathcal{P}\big(-\beta\leqslant\mathcal{Z}\leqslant\beta\big)$ | $\beta$ |
|---|---|
| 0,990 | 2,5758 |
| 0,991 | 2,6121 |
| 0,992 | 2,6521 |
| 0,993 | 2,6968 |
| 0,994 | 2,7478 |

**Exercice 5485**

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale de paramètre 0 et $\sigma^2$. *($\mathcal{X}\sim\mathcal{N}(0;\sigma^2)$).*

On cherche à déterminer la valeur de $\sigma$ de sorte à ce qu'on ait la probabilité suivante :

$\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant 4\big)=0{,}7$

On note $\mathcal{Z}$ une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètre 0 et 1. *($\mathcal{Z}\sim\mathcal{N}(0;1)$)*

1. Déterminer la valeur approchée de $x$ au millième tel que : $\mathcal{P}\big(\mathcal{Z}\leqslant x\big)=0{,}7$

2. En déduire une valeur approchée au millième près de l'écart-type $\sigma$ recherché.

**Exercice 6954**

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques.

Le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production est modélisé à l'aide d'une variable aléatoire $\mathcal{Y}$ qui suit une loi normale d'espérance $\mu=1$ et d'écart type $\sigma$, $\sigma$ étant un réel strictement positif.

Sachant que $\mathcal{P}\big(0{,}9\leqslant\mathcal{Y}\leqslant 1{,}1\big)=0{,}98$, déterminer une valeur approchée au millième de $\sigma$.

**Exercice 5486**

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale de paramètre 3 et $\sigma^2$.

Déterminer une valeur de $\sigma$ arrondie au millième près afin que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ vérifie les probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant 2\big)=0{,}4$ b. $\mathcal{P}\big(\big|\mathcal{X}-3\big|\leqslant 1\big)=0{,}45$

**Exercice 6328**

Sur une chaîne d'embouteillage dans une brasserie, la quantité $x$ *(en $c\ell$)* de liquide fournie par la machine pour remplir chaque bouteille de contenance $110\,c\ell$, peut être modélisée par une variable aléatoire $\mathcal{X}$ de la loi normale de moyenne $\mu$ et d'écart-type $\sigma=2$.

La législation impose qu'il y ait moins de $0{,}1\,\%$ de bouteilles contenant moins d'un litre.
A quelle valeur de la moyenne $\mu$, arrondie à l'unité près, doit-on régler la machine pour respecter cette législation?

## 8. Loi binomiale et théorème de Moivre-Laplace :

*(+2 exercices pour les enseignants)*

### Exercice 5494

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètres 75 et 0,4 *($\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(75\,;0{,}4)$)*.

1. Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ *(on donnera les valeurs arrondies au millième près)*.

2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la valeur approchée au millième des probabilités suivantes :
   a. $\mathcal{P}\big(18\leqslant\mathcal{X}\leqslant46\big)$ b. $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant25\big)$ c. $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\geqslant23\big)$

**Rappels :**

On a les deux propriétés suivantes de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire $\mathcal{W}$ :
$$E(a{\cdot}\mathcal{W}+b)=a{\cdot}E(\mathcal{W})+b \quad ; \quad V(a{\cdot}\mathcal{W}+b)=a^2{\cdot}V(\mathcal{W})$$
où $a$ et $b$ sont des nombres réels.

En notant $\mathcal{Z}$ la variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite *($\mathcal{Z}\sim\mathcal{N}(0\,;1)$)*, on considère la variable aléatoire $\mathcal{Y}$ définie par la relation :
$$\mathcal{Y}=\sigma(\mathcal{X}){\cdot}\mathcal{Z}+E(\mathcal{X})$$

3. a. Etablir les égalités suivantes :
   $E(\mathcal{Y})=E(\mathcal{X}) \quad ; \quad V(\mathcal{Y})=V(\mathcal{X})$

   b. Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{Y}$ suit une loi normale de paramètres 30 et 18.

   c. Donner les valeurs approchées au millième près de probabilités suivantes :
   $\mathcal{P}\big(18\leqslant\mathcal{Y}\leqslant46\big) \quad ; \quad \mathcal{P}\big(\mathcal{Y}\leqslant25\big) \quad ; \quad \mathcal{P}\big(\mathcal{Y}\geqslant23\big)$

4. a. Pour tous nombres réels $a$ et $b$ vérifiant $a<b$, émettre une conjecture quant à la comparaison des deux probabilités ci-dessous :
   $\mathcal{P}\big(a\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big) \quad ; \quad \mathcal{P}\big(a\leqslant\mathcal{Y}\leqslant b\big)$

   b. Quel théorème du cours permet de justifier cette conjecture.

### Exercice 5522

Une usine fabrique, en grande quantité, des rondelles d'acier pour la construction. Leur diamètre est exprimé en millimètres.

Les rondelles sont commercialisées par lot de 1 000.

On prélève au hasard un lot de 1 000 dans un dépôt de l'usine. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 1 000 rondelles.

On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui, à tout prélèvement de 1 000 rondelles, associe le nombre de rondelles non conformes parmi ces 1 000 rondelles.

On admet que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit la loi binomiale de paramètres $n=1000$ et $p=0{,}02$.

1. Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

2. a. Justifier l'approximation suivante :
   $\mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant15\big)\approx\mathcal{P}\big(-4{,}518\leqslant\mathcal{Z}\leqslant-1{,}129\big)$
   où $\mathcal{Z}$ suit une loi normale de paramètre 0 et 1.

   b. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 15 rondelles non conformes dans le lot de 1 000 rondelles.

### Exercice 6955

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques.

Les billes passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge. Après avoir été mélangés, les billes sont conditionnées en sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.

Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirés par les billes de couleur noire.

1. Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.

   a. On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira le résultat à $10^{-3}$.

   b. Dans un sachet de 40 billes, on a compté 12 billes noires. Ce constat permet-il de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes?

2. Si l'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égal à 99 %, quel nombre minimal de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif?

## *9. Loi normale : intervalle de fluctuation de la fréquence :*

*(+1 exercice pour les enseignants)*

### Exercice 5517

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}_n$ suivant une loi binomiale de paramètre $n$ et $p$ *($\mathcal{X}_n\sim\mathcal{B}(n\,;p)$)*.

On considère la variable aléatoire $\mathcal{Z}_n$ définie par :
$$\mathcal{Z}_n=\frac{\mathcal{X}_n-n{\cdot}p}{\sqrt{n{\cdot}p{\cdot}(1-p)}}$$

1. En utilisant les propriétés de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire :
   $$E\big(a{\cdot}\mathcal{X}+b\big)=a{\cdot}E\big(\mathcal{X}\big)+b \quad ; \quad V\big(a{\cdot}\mathcal{X}+b\big)=a^2{\cdot}V\big(\mathcal{X}\big)$$
   déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $\mathcal{Z}_n$.

2. a. Que peut-on dire de la valeur de la limite suivante :
   $$\lim_{n\mapsto+\infty}\mathcal{P}\big(a\leqslant\mathcal{Z}_n\leqslant b\big)$$

   b. En déduire la valeur de la limite :
   $$\lim_{n\mapsto+\infty}\mathcal{P}\big(-1{,}96\leqslant\mathcal{Z}_n\leqslant1{,}96\big)$$

3. On note $\mathcal{F}_n=\dfrac{\mathcal{X}_n}{n}$. Démontrer que pour un entier $n$ assez grand, on a :
   $$\mathcal{P}\left(p-1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\leqslant\mathcal{F}_n\leqslant p+1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right)\approx0{,}95$$

### Exercice 5518

Une loterie propose 200 tickets dont 50 sont des tickets gagnants. On considère la variable $\mathcal{X}$ donnant, sur un lot de 40 tickets choisi au hasard, le nombre de tickets gagnants.

On suppose que le nombre de tickets est suffisamment grand pour assimiler le tirage des 40 tickets à une jeu de tirage avec remise *(le fait de tirer un ticket ne modifie par les probabilités du jeu)*.

1. Préciser la loi suivie par la variable aléatoire $\mathcal{X}$, son espérance et son écart-type.

2. En étudiant la loi binomiale, donner l'intervalle de fluctuation de la fréquence au seuil de 95 %.

3. a. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence au seuil de 95 %. *(on arrondi les bornes au millième près)*.

   b. Un grand joueur achète 40 tickets mais ne possède que 7 tickets remportant un lot. Son tirage est-il représentatif au seuil de 95 % *(on utilisera l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %)*.

**Exercice 6072**

A des fins publicitaires, le grossiste affiche sur ses plaquettes : "88 % *de notre thé garanti sans trace de pesticides*".

Un inspecteur de la brigade de répression des fraudes souhaite étudier la validité de l'affirmation. A cette fin, il prélève 50 boîtes au hasard dans le stock du grossiste et en trouve 12 avec des traces de pesticides.

On suppose que, dans le stock du grossiste, la proportion de boîtes sans trace de pesticides est bien égale à 0,88.
On note $\mathcal{F}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 boîtes, associe la fréquence des boîtes ne contenant aucune trace de pesticides.

1. Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire $\mathcal{F}$ au seuil de 95 %. *(on utilisera les valeurs approchées au millième près)*.

2. L'inspecteur de la brigade de répression peut-il décider, au seuil de 95 %, que la publicité est mensongère?

## *10. Loi normale : hypothèse et intervalle de fluctuation :* *(+1 exercice pour les enseignants)*

**Exercice 5516**

On considère qu'une pièce est équilibrée. On lance 100 fois cette pièce et on considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ comptant le nombre de fois où la face "*pile*" est apparue.

1. Donner la loi de la variable aléatoire $\mathcal{X}$, son espérance, sa variance et son écart-type.

2. On définit la variable aléatoire $\mathcal{F}$ définie par : $\mathcal{F}=\dfrac{\mathcal{X}}{100}$

   a. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence au seuil de 95 %.

   b. Après 100 lancers de pièces, Jean obtient 38 fois la face "*pile*".
   Peut-on rejeter, au seuil de 5 %, l'hypothèse selon laquelle la pièce est équilibrée?

**Exercice 6959**

Un fabricant d'ampoules cherche à améliorer sa qualité et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production. Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000.

1. Dans le cas où il y aurait exactement 6 % d'ampoules défectueuses, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'ampoules défectueuses sur un échantillon aléatoire de taille 1 000.

2. A-t-on raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise?

**Exercice 6424**

On sait que 39 % de la population française est du groupe sanguin $A+$.
On cherche à savoir si cette proportion est la même parmi les donneurs de sang.
On interroge 183 donneurs de sang et parmi eux, 34 % sont du groupe sanguin $A+$.

Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse et justifier la réponse :

"*On ne peut pas rejeter, au seuil de 5 %, l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes du groupe sanguin A parmi les donneurs de sang est de 39 % comme dans l'ensemble de la population.*"

## *11. Loi normale : intervalle de confiance de la proportion :* *(+2 exercices pour les enseignants)*

**Exercice 6079**

On cherche à étudier le nombre d'étudiants d'une université connaissant la signification du sigle URSSAF. Pour cela, on les interroge en proposant un questionnaire à choix multiples. Chaque étudiant doit choisir parmi les trois réponses possibles.

Dans un premier sondage, on contaste que 240 étudiants répondent correctement, parmi les 400 interrogés.

Donner un intervalle de confiance au seuil de 95 % de l'estimation de la proportion $p$ des étudiants connaissant ce sigle dans cette université.

**Exercice 5521**

Une entreprise fabrique en grande série des pièces de bois.

Dans cette partie, on considère une grande quantité de pièces devant être livrées à une chaîne d'hypermarchés. On considère un échantillon de 1000 pièces prélevées au hasard dans cette livraison.

La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise.
On constate que 961 pièces sont sans défaut.

1. Quelle est la fréquence des pièces sans aucun défaut parmi cette livraison?

2. On note $F$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 pièces prélevées au hasard et avec remise dans cette livraison, associe la fréquence des pièces de cet échantillon qui sont sans défaut.

   Déterminer l'intervalle de confiance à 95 % de la proportion $p$ de pièces sans défaut dans la grande quantité devant être livrées.

## Exercice 6956

Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

On suppose que $n$ personnes ont répondu à la question, et on admet que ces personnes constituent un échantillon aléatoire de taille $n$ *(où $n$ est un entier nature supérieur à 50)*.
Parmi ces personnes, 29 % sont favorables au projet d'aménagement.

1. Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion de personnes qui sont favorables au projet dans la population totale.

2. Déterminer la valeur minimale de l'entier $n$ pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,04.

## Exercice 7805

Soit $g$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On note : $J = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$

Le but de cette partie est d'évaluer l'intégrale $J$ à l'aide de la méthode probabiliste décrite ci-après.

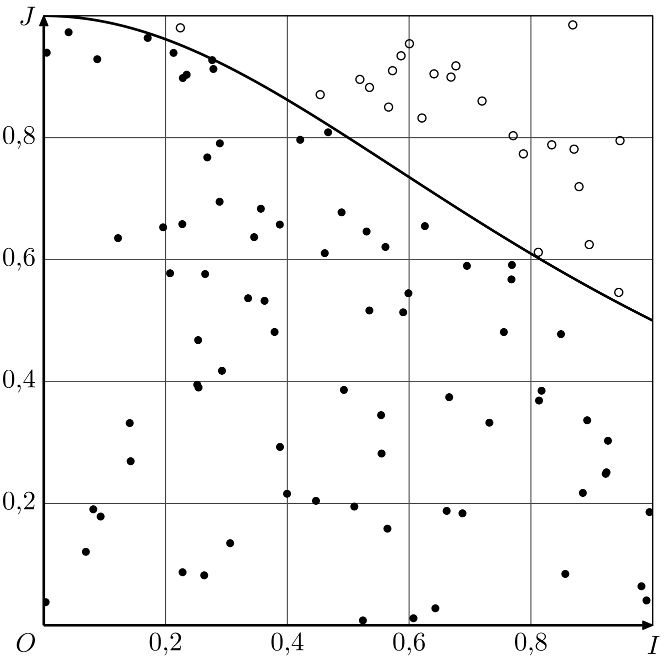
On choisit au hasard un point $M(x\,;y)$ en tirant de façon indépendante ses coordonnées $x$ et $y$ au hasard selon la loi uniforme sur $[0\,;1]$.
On admet que la probabilité $p$ qu'un point tiré de cette manière soit situé sous la courbe $\mathscr{C}_g$ est égale l'intégrale $J$.

En pratique, on initialise un compteur $c$ à 0, on fixe un entier naturel $n$ et on répète $n$ fois le processus suivant :

- on choisit au hasard et indépendamment deux nombres $x$ et $y$, selon la loi uniforme sur $[0\,;1]$ ;
- si $M(x\,;y)$ est au-dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$, on incrémente le compteur $c$ de 1.

On admet que $f = \dfrac{c}{n}$ est une valeur approchée de $J$. *C'est le principe de la méthode dite de Monte-Carlo.*

La figure ci-dessous illustre la méthode présentée pour $n = 100$.
100 points ont été placés aléatoirement dans le carré.
Les disques noirs correspondent aux points sous la courbe, les disques blancs aux points au-dessous de la courbe.
Le rapport du nombre de disques noirs par le nombre total de disques donne une estimation de l'aire sous la courbe.




1. Recopier et compléter l'algorithme ci-après afin que la fonction `estimation()` retourne une valeur approchée de $J$.

```
def estimation(n)
    c ← ...
    Pour i allant de 1 à ... faire
       x ← valeur aléatoire entre 0 et 1
       y ← ...
       Si ... alors
           ... prend la valeur ...
       Fin Si
    Fin Pour
    Renvoyer ...
```

   L'argument `n` indiqué lors de l'appel à la fonction `estimation()` est le nombre de points choisis pour réaliser cette approximation.

2. Pour $n = 1000$, l'algorithme ci-dessus a donné pour résultat : $f = 0{,}781$.
   Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la valeur exacte de $J$.

3. Quelle doit-être au minimum, la valeur de $n$ pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,02?

## 12. Loi normale centrée réduite et calculatrice :

*(+1 exercice pour les enseignants)*

**Exercice 7398**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

A l'aide de la calculatrice de la calculatrice, compléter les pointillés par les valeurs approchées au millième des intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \ldots$ b. $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \ldots$ c. $\displaystyle\int_{-9}^{9} f(x)\,\mathrm{d}x = \ldots$

**Exercice 7399**

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi de probabilité de moyenne 0 et d'écart-type 1. A l'aide de la calculatrice, donner les valeurs des probabilités suivantes arrodies au millième :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant -1)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 2)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 1)$

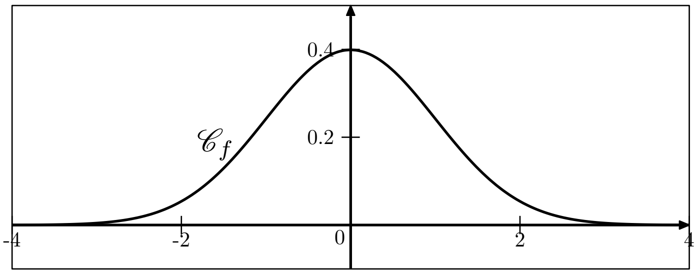
## 13. Loi normale centrée réduite, propriétés et calculatrice :

*(+1 exercice pour les enseignants)*

**Exercice 7401**

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

1. Donner la valeur de : $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 0)$.
2. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la densité $f$ de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ :




   a. Interpréter graphiquement le nombre $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 2)$.
   b. A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée au millième du nombre $\mathcal{P}(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant 2)$
   c. En déduire une valeur approchée de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 2)$ au millième près.

## 14. Loi normale et calculatrice :

*(+2 exercices pour les enseignants)*

**Exercice 7403**

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi normale de moyenne 10 et d'écart-type 3 .

A l'aide de la calculatrice, déterminer les probabilités suivantes arrondies au millième près :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 9)$ b. $\mathcal{P}(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant 12)$

**Exercice 7845**

En janvier 2015, le directeur d'un musée d'art contemporain commande une enquête concernant les habitudes des visiteurs.

Pour gérer les flux des visiteurs, une partie de l'enquête a porté sur la durée d'une visite de ce musée. Il a été établi que la durée $D$ d'une visite, en minutes, suit la loi normale de moyenne $\mu=90$ et d'écart-type $\sigma=15$.

1. Déterminer $\mathcal{P}(90\leqslant D\leqslant 120)$ puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Le directeur précise qu'il augmentera la capacité d'accueil de l'espace restauration du musée si plus de 2 % des visiteurs restent plus de 2 heures et 30 minutes par visite. Quelle sera alors sa décision ?

## 15. Loi normale et propriété de la moyenne :

*(+1 exercice pour les enseignants)*

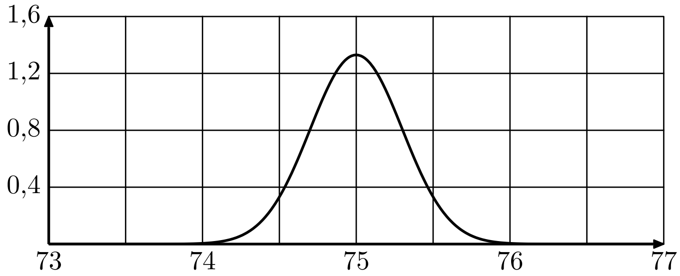
**Exercice 7442**

*Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à $10^{-3}$.*

Une entreprise fabrique en grande quantité des médailles circulaires.

Le diamètre exprimé en millimètre, d'une médaille fabriquée par cette entreprise est conforme lorsqu'il appartient à l'intervalle $[74{,}4\,;75{,}6]$.
On note $\mathcal{Y}$ la variable aléatoire qui, à chaque médaille prélevée au hasard dans la production, associe son diamètre en millimètre. On suppose que la variable aléatoire $\mathcal{Y}$ sui une loi normale de moyenne $\mu$ et d'écart-type 0,25.
La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la densité de probabilité de $\mathcal{Y}$.




1. Indiquer par lecture graphique la valeur de $\mu$.
2. Déterminer à l'aide de la calculatrice la probabilité $\mathcal{P}(74{,}4 \leqslant \mathcal{Y} \leqslant 75{,}6)$.

## 16. Loi normale et propriété de symétrie :

**Exercice 7404**

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale de moyenne 3 et d'écart-type 2.

On donne la valeur approchée de la probabilité suivante :
$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant 4) \approx 0{,}691$

Sans l'aide de la calculatrice, déterminer les probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant 3)$ b. $\mathcal{P}(3 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 4)$

c. $\mathcal{P}(2 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 3)$ d. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant 2)$

## 17. Loi normale et comparaison graphique :

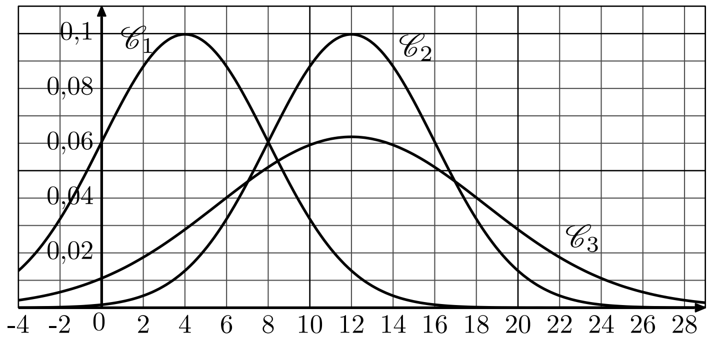
*(+1 exercice pour les enseignants)*

**Exercice 7391**

L'AFDIAG a fait une enquête et a constaté que la maladie coeliaque était diagnostiquée en moyenne 11 ans après les premiers symptômes.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire représentant le temps en années mis pour diagnostiquer la maladie coeliaque à partir de l'apparition des premiers symptômes.

On admet que la loi de $\mathcal{X}$ peut être assimilée à la loi normale d'espérance $\mu = 12$ et d'écart-type $\sigma = 4$.




1. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_1$ n'est pas la courbe de la densité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
2. a. A l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité $\mathcal{P}(10 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 12)$.

   b. Des deux courbes $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$, laquelle est la courbe représentative de la densité de $\mathcal{X}$.

## 18. Loi normale, écart-type et intervalle centrée :

*(+1 exercice pour les enseignants)*

**Exercice 7843**

Une entreprise spécialisée dans la personnalisation des étuis de smartphones fait ses achats chez un fournisseur.

Un étui est considéré conforme si son épaisseur est comprise entre $19{,}8\,mm$ et $20{,}2\,mm$.
Le fournisseur souhaite qu'au moins 95 % des étuis produits soient conformes. Pour cela, il veut vérifier les réglages des machines de production.
On choisit un étui au hasard dans la production du fournisseur.
On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire associée à l'épaisseur *(en mm)* de l'étui. On admet que $\mathcal{X}$ sui une loi normale d'espérance $20\,mm$.

1. En observant les réglages des machines de production, le fournisseur $B$ constate que l'écart-type de $\mathcal{X}$ est égal à 0,2.
   Justifier qu'il faut revoir les réglages des machines.
2. Déterminer une valeur de l'écart-type de $\mathcal{X}$ pour laquelle la probabilité qu'un étui soit conforme est environ égale à 0,95.

**Exercice 7491**

Une clé est dite conforme pour la lecture lorsque sa vitesse de lecture, exprimée en ${}^{Mo}\!/_{s}$, appartient à l'intervalle $[98\,;103]$.

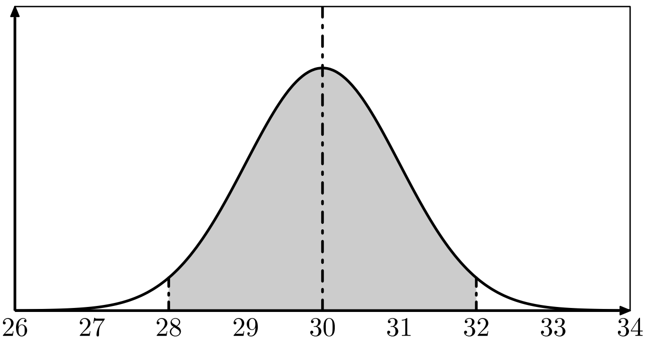
 

Une clé est dite conforme pour l'écriture lorsque sa vitesse d'écriture exprimée en ${}^{Mo}\!/_{s}$ appartient à l'intervalle $[28\,;33]$.

1. On note $\mathcal{R}$ la variable aléatoire qui, à chaque clé prélevée au hasard dans le stock, associe sa vitesse de lecture. On suppose que la variable aléatoire $R$ suit la loi normale d'espérance $\mu=100$ et d'écart-type $\sigma=1$.
Calculer la probabilité qu'une clé soit conforme pour la lecture.

2. On note $\mathcal{W}$ la variable aléatoire qui, chaque clé prélevée au hasard dans le stock, associe sa vitesse d'écriture. On suppose que la variable aléatoire $\mathcal{W}$ suit une loi normale.

   Le graphique ci-après représente la densité de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{W}$.




   L'unité d'aire est choisie de façon à ce que l'aire sous la courbe soit égale à un et l'aire grisé est environ égale à 0,95 unité d'aire. La droite d'équation $x=30$ est un axe de symétrie de la courbe.

   Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire $\mathcal{W}$. Justifier

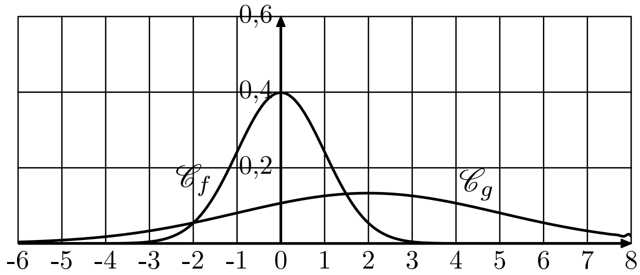
**Exercice 7437**

Pour la proposition ci-dessous, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Laquelle? Justifier votre réponse.

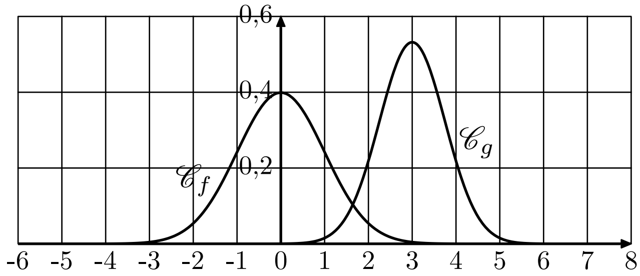
La fonction $f$ est la fonction densité de probabilité associée à la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$. La fonction $g$ est la fonction de densité de probabilité associée à la loi normale de moyenne $\mu=3$ et d'écart-type $\sigma=2$.

La représentation graphique de ces deux fonctions est :

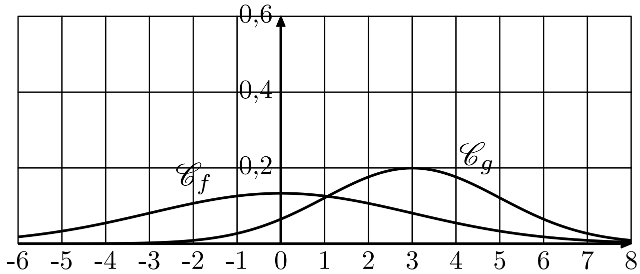
a.



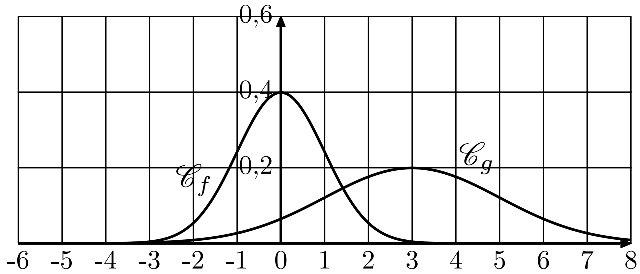

b.




c.




d.




## *19. Loi normale et probabilité conditionnelle :*

**Exercice 7489**

Un client du magasin s'inquiète de la durée de vie du téléphone qu'il vient de s'offrir de type $T_1$.
On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque téléphone mobile de type $T_1$ prélevé au hasard dans la production, associe sa durée de vie, en mois.
On admet que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit la loi normale d'espérance $\mu=48$ et d'écart-type $\sigma=10$.

1. Justifier que la probabilité que le téléphone de type $T_1$ prélevé fonctionne plus de 3 ans, c'est à dire 36 mois, est d'environ 0,885.

2. On sait que le téléphone de type $T_1$ prélevé a fonctionné plus de 3 ans. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne moins de 5 ans?

## *20. Loi normale inverse :* *(+1 exercice pour les enseignants)*

**Exercice 7834**

Un marathon est une épreuve sportive de course à pied.
On suppose que le temps en minute mis par un marathonien pour finir le marathon de Tartonville est modélisé par une variable aléatoire $\mathcal{T}$ qui suit une loi normale d'espérance $\mu=250$ et d'écart type $\sigma=39$.

- Calculer : $\mathcal{P}(\mathcal{T}\leqslant 300)$
- Par la méthode de votre choix, estimer la valeur du nom-

bre réel $t$, arrondi à l'unité, vérifiant : $\mathcal{P}(\mathcal{T}\geqslant t)=0{,}9$.

- Interpréter le résultat obtenu dans le cadre de l'exercice.

**Exercice 7167**

Des bateaux électriques sont équipés d'une batterie d'une autonomie moyenne de 500 minutes.
Les batteries des bateaux sont rechargées uniquement à la fin de chaque journée d'utilisation.
On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire correspondant à la durée de fonctionnement de la batterie d'un bateau, exprimée en minutes. On admet que $\mathcal{X}$ suit la loi normale d'espérance $\mu=500$ et d'écart-type $\sigma=10$.

On souhaite connaitre la durée d'utilisation, en minutes, par jour de chaque bateau afin que seuls 1 % des bateaux soient déchargés avant la fin de la journée.

## 21. Loi normale : annales :

*(+2 exercices pour les enseignants)*

**Exercice 6985**

Une base nautique propose la location de différentes embarcations pour visiter les gorges du Verdon. Les touristes peuvent louer des kayaks, des pédalos ou des bateaux électriques, pour une durée de 1 heure ou 2 heures.

*Les parties* **A** *et* **B** *sont indépendantes*

**Partie A**

Une étude statistique met en évidence que :

- 40 % des embarcations louées sont des pédalos ;
- 35 % des embarcations louées sont des kayaks ;
- Les autres embarcations louées sont des bateaux électriques ;
- 60 % des pédalos sont loués pour une durée de 1 heure ;
- 70 % des kayaks sont loués pour une durée de 1 heure ;
- la moitié des bateaux électriques sont loués pour une durée de 1 heure.

On interroge au hasard un touriste qui vient pour louer une embarcation. On note $A$, $B$, $C$, $D$ et $E$ les évènements suivants :

- $A$ : "*l'embarcation louée est un pédalo*" ;
- $B$ : "*l'embarcation louée est un kayak*" ;
- $C$ : "*l'embarcation louée est un bateau électrique*" ;
- $D$ : "*l'embarcation est louée pour une durée de* 1 *heure*" ;
- $E$ : "*l'embarcation est louée pour une durée de* 2 *heures*".

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que l'embarcation soit louée pour une durée de 2 heures est égales à 0,39.
3. Sachant que l'embarcation a été louée pendant 2 heures, quelle est la probabilité que ce soit un bateau électrique? Arrondir le résultat au centième.
4. La base nautique pratique les tarifs suivants :

| | 1 heure | 2 heures |
|---|---|---|
| Pédalo | 15 € | 25 € |
| Kayak | 10 € | 16 € |
| Bateau électrique | 35 € | 60 € |

En moyenne, 200 embarcations sont louées par jour. Déterminer la recette journalière que peut espérer la base nautique

**Partie B**

*Dans cette partie les résultats seront arrondis au millième*

Les bateaux électriques sont équipés d'une batterie d'une autonomie moyenne de 500 minutes.
Les batteries des bateaux sont rechargées uniquement à la fin de chaque journée d'utilisation.
On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire correspondant à la durée de fonctionnement de la batterie d'un bateau, exprimée en minutes. On admet que $\mathcal{X}$ suit la loi normale d'espérance $\mu=500$ et d'écart-type $\sigma=10$.

1. A l'aide de la calculatrice, calculer $\mathcal{P}(490<\mathcal{X}<520)$.
2. Chaque jour, les bateaux sont utilisés pendant une durée de 8 heures sans être rechargés.
Déterminer la probabilité que la batterie d'un bateau soit déchargée avant la fin de la journée.
3. Déterminer l'entier $a$ tel que : $\mathcal{P}(\mathcal{X}<a)\approx 0{,}01$
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

**Exercice 6972**

Un marathon est une épreuve sportive de course à pied.
Dans cet exercice, tous les résultats approchés seront donnés à $10^{-3}$ près.
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

**Partie A**

Une étude portant sur le marathon de Tartonville montre que :

- 34 % des coureurs terminent la course en moins de 234 minutes ;
- parmi les coureurs qui terminent la course en moins de 234 minutes, 5 % ont plus de 60 ans ;
- parmi les coureurs qui terminent la course en plus de 234 minutes, 84 % ont moins de 60 ans.

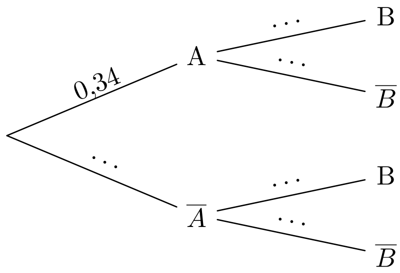
On sélectionne au hasard un coureur et on considère les évènements suivants :

- $A$ : "*le coureur a terminé le marathon en moins de* 234 *minutes*" ;
- $B$ : "*le coureur a moins de* 60 *ans*".

On rappelle que si $E$ et $F$ sont deux évènements, la probabilité de l'évènement $E$ est notée $\mathcal{P}(E)$ et celle de $E$ sachant $F$ est notée $\mathcal{P}_F(E)$. De plus, $\overline{E}$ désigne l'évènement contraire de $E$.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous associé à la situation de l'exercice :




2. a. Calculer la probabilité que la personne choisie ait terminé le marathon en moins de 234 minutes et soit âgée de plus de 60 ans.

   b. Vérifier que : $\mathcal{P}\big(\overline{B}\big) = 0{,}123$

   c. Calculer $\mathcal{P}_{\overline{B}}(A)$ et interpréter le résultat dans le cadre de l'exercice.

**Partie B**

On suppose que le temps en minutes mis par un marathonien pour finir le marathon de Tartonville est modélisé par une variable aléatoire $\mathcal{T}$ qui suit une loi normale d'espérance $\mu=250$ et d'écart-type $\sigma=39$.

1. Calculer $\mathcal{P}\big(210 \leqslant \mathcal{T} \leqslant 270\big)$

2. Un coureur est choisi au hasard parmi les coureurs qui ont mis entre 210 minutes et 270 minutes pour finir le marathon.

   Calculer la probabilité que ce coureur ait terminé la course en moins de 240 minutes.

3. a. Calculer $\mathcal{P}\big(\mathcal{T} \leqslant 300\big)$

   b. Par la méthode de votre choix, estimer la valeur du nombre réel $t$, arrondi à l'unité, vérifiant :
   $\mathcal{P}\big(\mathcal{T} \geqslant t\big)=0{,}9$

   c. Interpréter le résultat obtenu dans le cadre de l'exercice.

## Exercice 6977

D'après l'AFDIAG *(Association Française Des Intolérants au Gluten)*, la maladie cœliaque, aussi appelée intolérance au gluten, est une des maladies digestives les plus fréquentes. Elle touche environ 1 % de la population.

On estime que seulement 20 % des personnes intolérantes au gluten passent le test pour être diagnostiquées.

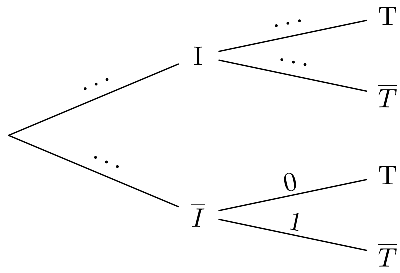
On considère que si une personne n'est pas intolérante au gluten, elle ne passe pas le test pour être diagnostiquée.

On choisit au hasard une personne dans la population française qui compte environ 66,6 millions d'habitants au 1$^{\text{er}}$ janvier 2016.
On considère les évènements :

- $I$ : *"la personne choisie est intolérante au gluten"* ;
- $T$ : *"la personne choisie passe le test pour être diagnostiquée"*

**Partie A**

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous :




2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit intolérante au gluten et ne passe pas le test pour être diagnostiquée.

3. Montrer que : $\mathcal{P}(T)=0{,}002$

**Partie B**

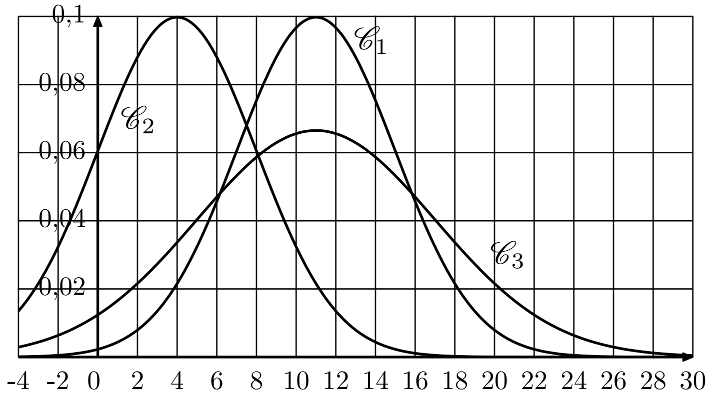
L'AFDIAG a fait une enquête et a constaté que la maladie cœliaque était diagnostiquée en moyenne 11 ans après les premiers symptômes.
On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire représentant le temps en années mis pour diagnostiquer la maladie cœliaque à partir de l'apparition des premiers symptômes.
On admet que la loi de $\mathcal{X}$ peut être assimilée à la loi normale d'espérance $\mu=11$ et d'écart-type $\sigma=4$.

1. Calculer la probabilité que la maladie soit diagnostiquée entre 9 ans et 13 ans après les premiers symptômes. Arrondir le résultat à $10^{-3}$.

2. Calculer $\mathcal{P}\big(\mathcal{X} \leqslant 6\big)$. Arrondir le résultat à $10^{-3}$.

3. Sachant que $\mathcal{P}\big(\mathcal{X} \leqslant a\big)=0{,}84$, donner la valeur de $a$ arrondie à l'unité.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Laquelle de ces trois courbes représente la fonction de densité de la loi normale d'espérance $\mu=11$ et d'écart-type $\sigma=4$ ? Justifier le choix. On pourra s'aider des réponses aux questions précédentes.




## Exercice 6979

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni enlève aucun point.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

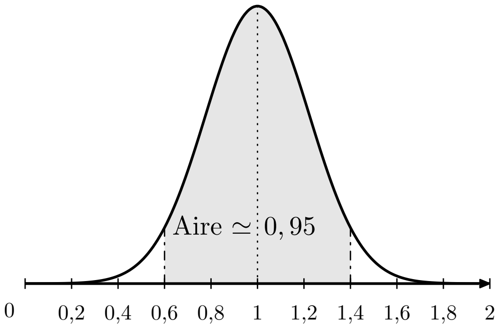
1. On considère la fonction $g$ définie sur $\big]0\,;+\infty\big[$ par :
   $$g(x)=\frac{2}{x}$$
   La valeur moyenne de la fonction $g$ sur l'intervalle $\big[1\,;\mathrm{e}\big]$

est :

(a.) 2 (b.) $\dfrac{1}{e-1}$ (c.) $\dfrac{2}{e-1}$ (d.) $\dfrac{-2}{e-1}$

2. On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale. La courbe ci-dessous représente la fonction densité $f$ associée à la variable $\mathcal{X}$.




(a.) L'espérance de $\mathcal{X}$ est 0,4.

(b.) L'espérance de $\mathcal{X}$ est 0,95.

(c.) L'écart-type de $\mathcal{X}$ est environ 0,4.

(d.) L'écart-type de $\mathcal{X}$ est environ 0,2.

3. A l'occasion de son inauguration, un hypermarché offre à ses clients un ticket à gratter par tranche de 10 euros d'achats. *L'hypermarché **affirme** que* 15 % *des tickets à gratter sont gagnants*, c'est à dire donneront droit à un bon d'achat de 5 euros.

Amandine a reçu 50 tickets à gratter après un achats de 500 euros dans cet hypermarché. Deux d'entre eux étaient gagnants.

On suppose que le nombre de tickets à gratter est suffisamment important pour considérer qu'un échantillon de 50 tickets correspond à un tirage aléatoire avec remise.

(a.) L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence observée de tickets gagnants dans un échantillon de 50 tickets à gratter est $[0{,}051\,;0{,}249]$, les bornes étant arrondies au millième.

(b.) L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence observée de tickets gagnants dans un échantillon de 50 tickets à gratter est $[0{,}100\,;0{,}200]$, les bornes étant arrondies au millième.

(c.) La fréquence de tickets gagnants reçus par Amandine est $\dfrac{50}{500}$.

(d.) Amandine peut annoncer avec un risque de 5 % que l'affirmation de l'hypermarché n'est pas mensongère.

## *22. Intervalle de fluctuation asymptotique :*

### Exercice 7842

Une entreprise spécialisée dans la personnalisation des étuis de smartphones fait ses achats chez un fournisseur qui lui garantit 94 % d'étuis non défectueux.

Un employé de l'entreprise prélève un échantillon de 400 étuis qui proviennent de son fournisseur.
Il constate que 350 de ces étuis ne sont pas défectueux.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des étuis défectueux dans un échantillon aléatoire de 400 étuis provenant du fournisseur.
On donnera des valeurs approchées au millième des bornes de cet intervalle.

2. Faut-il informer le fournisseur d'un problème?

### Exercice 7836

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Parmi les quatre réponses proposées , une seule est exacte. Laquelle? Justifier votre réponse.*

A l'occasion de son inauguration, un hypermarché offre à ses clients un ticket à gratter par tranche de 10 euros d'achats. L'hypermarché affirme que 15 % des tickets à gratter sont gagnants, c'est à dire donneront droit à un bon d'achat de 5 euros.

Amandine a reçu 50 tickets à gratter après un achat de 500 euros dans cet hypermarché. Deux d'entre eux étaient gagnants.

On suppose que le nombre de tickets à gratter est suffisamment important pour considérer qu'un échantillon de 50 tickets correspond à un tirage aléatoire avec remise.

a. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence observée de tickets gagnants dans un échantillon de 50 tickets à gratter est $[0{,}051\,;0{,}249]$, les bornes étant arrondies au millième.

b. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence observée de tickets gagnants dans un échantillon de 50 tickets à gratter est $[0{,}100\,;0{,}200]$, les bornes étant arrondies au millième.

c. La fréquence de tickets gagnants reçus par Amandine est $\dfrac{50}{500}$.

d. Amandine peut annoncer avec un risque de 5 % que l'affirmation de l'hypermarché n'est pas mensongère.

### Exercice 7839

Un responsable d'auto-école affirme que pour l'année 2016, la probabilité d'être reçu à l'examen est égale à 0,62.
Ayant des doutes sur cette affirmation, une association d'automobilistes décide d'interroger 400 candidats à l'examen parmi ceux de 2016. Il s'avère que 220 d'entre eux ont effectivement obtenu le permis de conduire.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de candidats reçus dans un échantillon aléatoire de 400 candidats.

2. Peut-on émettre des doutes sur l'affirmation du responsable de cette auto-école?
Justifier votre réponse.

### Exercice 7840

*Les résultats seront arrondis au millième près.*

Sur la devanture de son magasin, le gérant du supermarché affiche :

"*Plus de 90 % des clients de notre magasin sont satisfaits par la mise en place de nos caisses automatiques*"

Une association de consommateurs souhaite examiner cette affirmation. Pour cela, elle réalise un sondage : 860 clients sont interrogés, et 763 d'entre eux se disent satisfaits par la mise en place de ces caisses automatiques.

Cela remet-il en question l'affirmation du gérant?

**Exercice 7844**

En Janvier 2015, le directeur d'un musée d'art contemporain commande une enquête concernant les habitudes des visiteurs.

Sur l'ensemble des musées d'art contemporain, 22 % des visiteurs sont de nationalité étrangère. Sur un échantillon aléatoire de 2 000 visiteurs du musée considéré précédemment, 490 visiteurs sont de nationalité étrangère.
Que peut-on en conclure le directeur de ce musée? Argumenter.

## 23. Intervalle de confiance :

*(+1 exercice pour les enseignants)*

**Exercice 7835**

*Parmi les réponses proposées, une seule est correcte. Laquelle? Justifier votre réponse.*

Une entreprise fabrique des tubes métalliques de largeur $2\,m$. Un tube métallique est considéré conne étant dans la norme si sa longueur est comprise entre $1{,}98\,m$ et $2{,}02\,m$. On prélève au hasard un échantillon de 1 000 tubes, on observe que 954 tubes sont dans la norme.

L'intervalle de confiance de la fréquence des tubes dans la norme pour cette entreprise au niveau de confiance de 95 %, avec les bornes arrondies à $10^{-3}$ est :

a. $[0{,}922\,;\,0{,}986]$ b. $[0{,}947\,;\,0{,}961]$

c. $[1{,}98\,;\,2{,}02]$ d. $[0{,}953\,;\,0{,}955]$

## 24. Intervalle de confiance et amplitude :

*(+1 exercice pour les enseignants)*

**Exercice 7833**

Parmi les questions ci-desssous, une seule des réponses proposées est correcte. Laquelle? Justifier votre réponse.

Une enquête sanitaire a pour objectif d'estimer la proportion de personnes qui respectent le calendrier de vaccinations préconisé par le Haut Conseil de la Santé Publique. Pour obtenir un intervalle de confiance d'amplitude 0,01 au niveau de confiance 0,95 de cette proportion, il faut interroger :

a. 200 personnes b. 400 personnes

c. 10 000 personnes d. 40 000 personnes

**Exercice 7838**

Un article de journal affirme, qu'en France, il y a 16 % de gauchers. Un chercheur souhaite vérifier cette affirmation. Pour cela, il veut déterminer la taille de l'échantillon de la population française à étudier qui permettrait d'obtenir un intervalle de confiance d'amplitude égale à 0,1 au niveau de confiance de 0,95. La taille de l'échantillon est :

a. 30 b. 64 c. 100 d. 400

## 26. Annales - loi normale et probabilité conditionnelle :

*(+1 exercice pour les enseignants)*

**Exercice 6073**

Une entreprise industrielle fabrique des pièces cylindriques en grande quantité. Pour toute pièce prélevée au hasard, on appelle $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui lui associe sa longueur en millimètre et $\mathcal{Y}$ la variable aléatoire qui lui associe son diamètre en millimètre.

On suppose que $\mathcal{X}$ suit une loi normale de moyenne $\mu_1=36$ et d'écart-type $\sigma_1=0{,}2$ et que $\mathcal{Y}$ suit la loi normale de moyenne $\mu_2=6$ et d'écart-type $\sigma_2=0{,}05$.

1. Une pièce est dite conforme pour la longueur si sa longueur est comprise entre $\mu_1-3\sigma_1$ et $\mu_1+3\sigma_1$. Quelle est une valeur approchée à $10^{-3}$ près de la probabilité $p_1$ pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme pour la longueur?
2. Une pièce est dite conforme pour le diamètre si son diamètre est compris entre $5{,}88\,mm$ et $6{,}12\,mm$. Le tableau donné ci-contre a été obtenu à l'aide d'un tableur. Il indique pour chacune des valeurs de $k$, la probabilité que $\mathcal{Y}$ soit inférieure ou égal à cette valeur.

| $k$ | $\mathcal{P}(\mathcal{Y}\leqslant k)$ | $k$ | $\mathcal{P}(\mathcal{Y}\leqslant k)$ | $k$ | $\mathcal{P}(\mathcal{Y}\leqslant k)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 5,8 | 3,16712$E$-05 | 5,94 | 0,11506967 | 6,08 | 0,945200708 |
| 5,82 | 0,000159109 | 5,96 | 0,211855399 | 6,1 | 0,977249868 |
| 5,84 | 0,000687138 | 5,98 | 0,344578258 | 6,12 | 0,991802464 |
| 5,86 | 0,00255513 | 6 | 0,5 | 6,14 | 0,99744487 |
| 5,88 | 0,008197536 | 6,02 | 0,655421742 | 6,16 | 0,999312862 |
| 5,9 | 0,022750132 | 6,04 | 0,788144601 | 6,18 | 0,999840891 |
| 5,92 | 0,054799292 | 6,06 | 0,88493033 | 6,2 | 0,999968329 |

Déterminer à $10^{-3}$ près la probabilité $p_2$ pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme pour le diamètre *(on pourra s'aider du tableau ci-contre).*

3. On prélève une pièce au hasard. On appelle $L$ l'évènement "*la pièce est conforme pour la longueur*" et $D$ l'évènement "*la pièce est conforme pour le diamètre*".

   On suppose que les évènements $L$ et $D$ sont indépendants.

   a. Une pièce est acceptée si elle est conforme pour la longueur et pour le diamètre.
   Déterminer la probabilité pour qu'une pièce prélevée au hasard ne soit pas acceptée *(le résultat sera arrondi à $10^{-2}$).*

   b. Justifier que la probabilité qu'elle soit conforme pour le diamètre sachant qu'elle n'est pas conforme pour la longueur, est égale à $p_2$.

## *28. Annales - lois normales et intervalle de fluctuations :*

*(+1 exercice pour les enseignants)*

### Exercice 6422

En prévision d'une élection entre deux candidats $A$ et $B$, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs.
Parmi les 1200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat $A$ et les autres pour le candidat $B$.

Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat $A$ ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat $B$, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat $B$ ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat $A$.

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :

- $A$ l'évènement "*la personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat $A$*" ;
- $B$ l'évènement "*la personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat $B$*" ;
- $V$ l'évènement "*la personne interrogée dit la véritée*".

1. Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.
2. a. Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.

   b. Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat $A$.
3. Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat $A$ est 0,529.
4. L'institut de sondage publie alors les résultats suivants :

   > 52,9 % des électeurs* voteraient pour le candidat $A$.
   >
   > * estimation après redressement, fondée sur un sondage d'un échantillon représentatif de 1200 personnes

   Au seuil de confiance de 95 %, le candidat $A$ peut-il croire en sa victoire? *(on utilisera des valeurs approchées au millième près)*
5. Pour effectuer ce sondage, l'institut a réalisé une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure. La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est 0,4.
   L'institut de sondage souhaite obtenir un échantillon de 1200 réponses.
   Quel temps moyen, exprimé en heures, l'institut doit-il prévoir pour parvenir à cet objectif?

### Exercice 6766

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation "*pur jus*".

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de "*pur jus*" est notée $x$, où $x$ est un réel de l'intervalle $[0;1]$.
Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation "*pur jus*".

On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les évènements suivants :

- $R$ : "*la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange*" ;
- $J$ : "*la bouteille prélevée est une bouteille de pur jus*".

**Partie A**

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la valeur exacte de $x$.
3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de "*pur jus*".
   Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

**Partie B**

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot de 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.
On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de "*pur jus*" dans ce lot.

On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire $\mathcal{X}$. On en donnera les paramètres.

2. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de "*pur jus*". On arrondira le résultat au millième.

**Partie C**

Un fournisseur assure que 90 % des bouteilles de sa production de pur jus d'orange contiennent moins de 2 % de pulpe. Le service qualité du supermarché prélève un échantillon de 900 bouteilles afin de vérifier cette affirmation. Sur cet échantillon, 766 bouteilles présentent moins de 2 % de pulpe.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion de bouteilles contenant moins de 2 % de pulpe au seuil de 95 %.

2. Que penser de l'affirmation du fournisseur?

**Exercice 5538**

*Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres*

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non-commerciable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.

La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi normale d'espérance $\mu=400$ et d'écart-type $\sigma=11$.

*Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche*

**Partie A**

*On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche*

| $x$ | 308 | 385 | 390 | 395 | 400 | 405 | 410 | 415 | 420 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant x)$ | 0,035 | 0,086 | 0,182 | 0,325 | 0,5 | 0,675 | 0,818 | 0,914 | 0,965 |

1. Calculer $\mathcal{P}(390\leqslant\mathcal{X}\leqslant410)$.

2. Calculer la probabilité $p$ qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.

3. Le fabricant trouve cette probabilité $p$ trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de $\sigma$ sans modifier celle de $\mu$.

   Pour quelle valeur de $\sigma$ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96 %? On arrondira le résultat au dixième.

   On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque $\mathcal{Z}$ est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart type 1, on a :
   $\mathcal{P}(\mathcal{Z}\leqslant-1{,}751) \approx 0{,}040$

**Partie B**

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables. Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de 300.

2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables.
   Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1., peut-on décider que l'objectif est atteint?

**Partie C**

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire $\mathcal{T}$ qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

1. On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de 0,913. En déduire la valeur de $\lambda$ arrondie au millième.

Dans toute la suite, on prendra : $\lambda=0{,}003$

2. Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours?

3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison? Si non, pour combien de jours est-ce vrai?

## 29. Annales - lois normales et intervalle de confiances :

*(+1 exercice pour les enseignants)*

**Exercice 6071**

**Partie A**

Soient $n$ un entier naturel, $p$ un nombre réel compris entre 0 et 1, et $\mathcal{X}_n$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$. On note $\mathcal{F}_n=\dfrac{\mathcal{X}_n}{n}$ et $f$ la valeur prise par $f$ la valeur prise par $F_n$. On rappelle que, pour $n$ assez grand, l'intervalle $\left[p-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;p+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la fréquence $f$ avec une probabilité au moins égale à 0,95.

En déduire que l'intervalle $\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient $p$ avec une probabilité au moins égale à 0,95.

**Partie B**

On cherche à étudier le nombre d'étudiants connaissant la signification du sigle URSSAF. Pour cela, on les interroge en proposant un questionnaire à choix multiples. Chaque étudiant doit choisir parmi les trois réponses possibles.

On note $r$ la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse. Tout étudiant connaissant la bonne réponse répond $A$, sinon il répond au hasard *(de façon équiprobable)*.

1. On interroge un étudiant au hasard. On note :
   - $A$ : "*l'étudiant répond A*" ;
   - $B$ : "*l'étudiant répond B*" ;
   - $C$ : "*l'étudiant répond C*" ;
   - $R$ : "*l'étudiant connaît la réponse*" ;
   - $\overline{R}$ : l'évènement contraire de $R$.

   a. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.

   b. Montrer que la probabilité de l'évènement $A$ est :
   $\mathcal{P}(A) = \dfrac{1}{3}\cdot(1+2\cdot r)$.

   c. Exprimer en fonction de $r$ la probabilité qu'une personne ayant choisie $A$ connaisse la bonne réponse.

2. Pour estimer $r$, on interroge 400 personnes et on note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes résponses. On admettra qu'interroger au hasard 400 étudiant revient à effectuer un tirage avec remise de 400 étudiants dans l'ensemble de tous les étudiants.

   a. Donner la loi de $\mathcal{X}$ et ses paramètres $n$ et $p$ en fonction de $r$.

   b. Dans un premier sondage, on contaste que 240 étudiants répondent $A$, parmi les 400 interrogés.
   Donner un intervalle de confiance au seuil de 95 % de l'estimation de $p$.
   En déduire un intervalle de confiance au seuil de 95 % de $r$.

   c. Dans la suite, on suppose que $r$=0,4. Compte-tenu du grand nombre d'étudiants, on considérera que $\mathcal{X}$ suit une loi normale.
   - Donner les paramètres de cette loi normale.
   - Donner une valeur approchée de $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 250)$ à $10^{-2}$ près.

     On pourra s'aider de la tableau ci-dessous 1, qui donne une valeur approchée de $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant t)$ où $\mathcal{X}$ est la variable aléatoire de la question 2. b..

$C3$ ▾ =LOI.NORMALE($A12+E$1;240;RACINE(96);VRAI)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,0 | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
| 2 | 235 | 0,305 | 0,309 | 0,312 | 0,316 | 0,319 | 0,323 | 0,327 | 0,33 | 0,334 | 0,338 |
| 3 | 236 | 0,342 | 0,345 | 0,349 | 0,353 | 0,357 | 0,36 | 0,364 | 0,368 | 0,372 | 0,376 |
| 4 | 237 | 0,38 | 0,384 | 0,388 | 0,391 | 0,395 | 0,399 | 0,403 | 0,407 | 0,411 | 0,415 |
| 5 | 238 | 0,419 | 0,423 | 0,427 | 0,431 | 0,435 | 0,439 | 0,443 | 0,447 | 0,451 | 0,455 |
| 6 | 239 | 0,459 | 0,463 | 0,467 | 0,472 | 0,476 | 0,48 | 0,484 | 0,488 | 0,492 | 0,496 |
| 7 | 240 | 0,5 | 0,504 | 0,508 | 0,512 | 0,516 | 0,52 | 0,524 | 0,528 | 0,533 | 0,537 |
| 8 | 241 | 0,541 | 0,545 | 0,549 | 0,553 | 0,557 | 0,561 | 0,565 | 0,569 | 0,573 | 0,577 |
| 9 | 242 | 0,581 | 0,585 | 0,589 | 0,593 | 0,597 | 0,601 | 0,605 | 0,609 | 0,612 | 0,616 |
| 10 | 243 | 0,62 | 0,624 | 0,628 | 0,632 | 0,636 | 0,64 | 0,643 | 0,647 | 0,651 | 0,655 |
| 11 | 244 | 0,658 | 0,662 | 0,666 | 0,67 | 0,673 | 0,677 | 0,681 | 0,684 | 0,688 | 0,691 |
| 12 | 245 | 0,695 | 0,699 | 0,702 | **0,706** | 0,709 | 0,713 | 0,716 | 0,72 | 0,723 | 0,726 |
| 13 | 246 | 0,73 | 0,733 | 0,737 | 0,74 | 0,743 | 0,746 | 0,75 | 0,753 | 0,756 | 0,759 |
| 14 | 247 | 0,763 | 0,766 | 0,769 | 0,772 | 0,775 | 0,778 | 0,781 | 0,784 | 0,787 | 0,79 |
| 15 | 248 | 0,793 | 0,796 | 0,799 | 0,802 | 0,804 | 0,807 | 0,81 | 0,813 | 0,815 | 0,818 |
| 16 | 249 | 0,821 | 0,823 | 0,826 | 0,829 | 0,831 | 0,834 | 0,836 | 0,839 | 0,841 | 0,844 |
| 17 | 250 | 0,846 | 0,849 | 0,851 | 0,853 | 0,856 | 0,858 | 0,86 | 0,863 | 0,865 | 0,867 |
| 18 | 251 | 0,869 | 0,871 | 0,874 | 0,876 | 0,878 | 0,88 | 0,882 | 0,884 | 0,886 | 0,888 |
| 19 | 252 | 0,89 | 0,892 | 0,893 | 0,895 | 0,897 | 0,899 | 0,901 | 0,903 | 0,904 | 0,906 |
| 20 | 253 | 0,908 | 0,909 | 0,911 | 0,913 | 0,914 | 0,916 | 0,917 | 0,919 | 0,921 | 0,922 |
| 21 | 254 | 0,923 | 0,925 | 0,926 | 0,928 | 0,929 | 0,931 | 0,932 | 0,933 | 0,935 | 0,936 |
| 22 | 255 | 0,937 | 0,938 | 0,94 | 0,941 | 0,942 | 0,943 | 0,944 | 0,945 | 0,947 | 0,948 |
| 23 | 256 | 0,949 | 0,95 | 0,951 | 0,952 | 0,953 | 0,954 | 0,955 | 0,956 | 0,957 | 0,958 |
| 24 | 257 | 0,959 | 0,96 | 0,96 | 0,961 | 0,962 | 0,963 | 0,964 | 0,965 | 0,965 | 0,966 |
| 25 | 258 | 0,967 | 0,968 | 0,968 | 0,969 | 0,97 | 0,97 | 0,971 | 0,972 | 0,972 | 0,973 |
| 26 | 259 | 0,974 | 0,974 | 0,975 | 0,976 | 0,976 | 0,977 | 0,977 | 0,978 | 0,978 | 0,979 |
| 27 | 260 | 0,979 | 0,98 | 0,98 | 0,981 | 0,981 | 0,982 | 0,982 | 0,983 | 0,983 | 0,984 |

Exrtait d'une feuille de calcul

*Exemple d'utilisation :* au croisement de la ligne 12 et de la colonne $E$ le nombre 0,706 correspond à $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 245{,}3)$

## Exercice 6767

### Partie A

Le chikungunya est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par les piqûres de moustiques femelles infectées.

Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus. Le laboratoire fabriquant ce test fourni les caractéristiques suivantes :

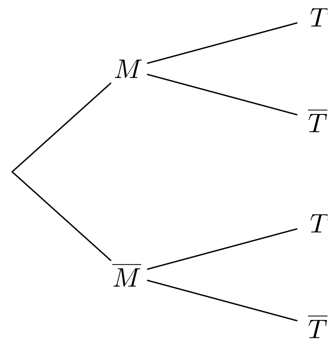
- la probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de 0,98 ;
- la probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de 0,01.

On procède à un test de dépistage systématique dans une population "*cible*". Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :

- $M$ l'évènement : "*l'individu choisi est atteint du chikungunya*"
- $T$ l'évènement : "*le test de l'individu choisi est positif*"

On notera $\overline{M}$ *(respectivement $\overline{T}$)* l'évènement contraire de l'évènement $M$ *(respectivement $T$)*.
On note $p$ $(0\leqslant p\leqslant 1)$ la proportion de personnes atteintes par la maladie dans la population cible.

1. a. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :




   b. Exprimer $\mathcal{P}(M\cap T)$, $\mathcal{P}(\overline{M}\cap T)$ puis $\mathcal{P}(T)$ en fonction de $p$.

2. a. Démontrer que la probabilité de $M$ sachant $T$ est donnée par la fonction $f$ définie sur $[0\,;1]$ par :
   $f(p) = \dfrac{98\cdot p}{97\cdot p+1}$

   b. Etudier les variations de la fonction $f$.

3. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité d'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est supérieure à 0,95.
   En utilisant les résultats de la question 2., à partir de quelle proportion $p$ de malades dans la population le test est-il fiable?

### Partie B

En Juillet 2014, l'institut de veille sanitaire d'une île, en s'appuyant sur les données remontées par les médecins, publie que 15 % de la population est atteinte par le virus.

Comme certaines personnes ne consultent pas forcément leur médecin, on pense que la proportion est en réalité plus importante.

Pour s'en assurer, on se propose d'étudier un échantillon de 1 000 personnes choisies au hasard dans cette île. La population est suffisamment importante pour considérer qu'un tel échantillon résulte de tirages avec remise.

On désigne par $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 1000 personnes choisies au hasard, fait correspondre le nombre de personnes atteintes par le virus et par $\mathcal{F}$ la variable aléatoire donnant la fréquence associée.

1. a. Sous l'hypothèse $p=0{,}15$, déterminer la loi de $\mathcal{X}$.

   b. Dans un échantillon de 1000 personnes choisies au hasard dans l'île, on dénombre 197 personnes atteintes par le virus.

   Quelle conclusion peut-on tirer de cette observation à propos du chiffre de 15 % publié par l'institut de veille sanitaire?

   Justifier. *(On pourra s'aider du calcul d'un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %)*

2. On considère désormais que la valeur de $p$ est inconnue.

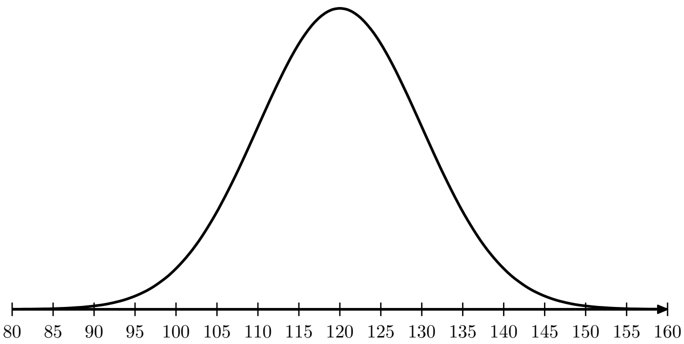
   En utilisant l'échantillon de la question 1. b., proposer un intervalle de confiance de la valeur de $p$, au niveau de confiance de 95 %.

**Partie C**

Le temps d'incubation, exprimé en heures, du virus peut être modélisé par une variable alátoire $\mathcal{T}$ suivant une loi normale d'écart type $\sigma=10$.

On souhaite déterminer sa moyenne $\mu$.

La représentation graphique de la fonction densité de probabilité $\mathcal{T}$ est donnée ci-dessous :




1. a. Conjecturer, à l'aide du graphique, une valeur approchée de $\mu$.

   b. On donne $\mathcal{P}(\mathcal{T}\leqslant 110)=0{,}18$. Hachurer sur le graphique un domaine dont l'aire correspond à la probabilité donnée.

2. On note $\mathcal{T}'$ la variable aléatoire égale à $\dfrac{\mathcal{T}-\mu}{10}$.

   a. Quelle loi la variable aléatoire $\mathcal{T}'$ suit-elle?

   b. Déterminer une valeur approchée à l'unité près de la moyenne $\mu$ de la variable aléatoire $\mathcal{T}$ et vérifier la conjecture de la question 1..

## 255. Exercices non-classés : *(+7 exercices pour les enseignants)*

### Exercice 6957

Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

On admet que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6.

Combien de personnes l'institut doit-il interroger au minimum pour garantir, avec une probabilité supérieur à 0,9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400.

### Exercice 7579

On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale de paramètre 13 et 1 $(\mathcal{X}\sim\mathcal{N}(13\,;1^2))$

La valeur de la probabilité $\mathcal{P}(11{,}5\leqslant\mathcal{X}\leqslant 14{,}5)$ arrondie au millième près :

1. 0,437
2. 0,866
3. 0,954
4. 0,999