Hors programme lycée/Comportements asymptotiques

1. Première approche :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 1

On considère trois fonctions f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par les relations :

$f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+3}$; $g(x)=\dfrac{2\cdot x-1}{\sqrt{x}}$; $h(x)=\dfrac{2\cdot x^2+x}{5\cdot x}$

On donne ci-dessous un tableau de valeurs pour chacune des fonctions :

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$	$\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{2{,}1}{3{,}01}$	$\dfrac{2{,}01}{3{,}000\,1}$	$\dfrac{2{,}001}{3{,}000\,001}$	$\dfrac{2{,}000\,1}{3{,}000\,000\,01}$

x	0,01	0,000 1	0,000 001
$g(x)$	$\dfrac{-0{,}98}{0{,}1}$	$\dfrac{-0{,}999\,8}{0{,}01}$	$\dfrac{-0{,}999\,998}{0{,}001}$

x	1	0,1	0,01	0,001	0,000 1
$h(x)$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{0{,}12}{0{,}5}$	$\dfrac{0{,}010\,2}{0{,}05}$	$\dfrac{0{,}001\,002}{0{,}005}$	$\dfrac{0{,}000\,100\,02}{0{,}000\,5}$

Remarquer que, dans chaque tableau, les valeurs de x "*progressent lentement*" vers 0.

1. a. Pour chaque tableau et à l'aide de la calculatrice, observer la progression des valeurs approchées de ces quotients.

   b. Dans chaque cas, faire une conjecture sur la valeur limite de ces images lorsque :
   "*x tend vers 0 par des valeurs supérieures à 0*"
   Pour la fonction f, cette valeur se note :
   $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} f(x)$

2. A l'aide de votre calculatrice, tracer les courbes représentatives de ces fonctions et observer la courbe au "*voisinage*" de l'axe des ordonnées.

3. Calculs de limites à l'infini :

Exercice 2

Déterminer les limites ci-dessous :

a. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x\cdot(2x+1)$

b. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} (3-4x)(x+1)$

c. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} 3x^2+2x+\dfrac{3}{2x+1}$

d. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{3x-4}{5+\dfrac{1}{x}}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{3}{2x-1}$

f. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x^2+x}{x^3-2x}$

Exercice 3

Parmi les limites proposées ci-dessous, donner celles représentant une forme indéterminée ; donner la valeur des autres limites :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 2x^4-x^3$

b. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} 5x^3-2x^2$

c. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{3}{5-2x}$

d. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \sqrt{2+x^2}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x+\sqrt{x}}{x^2}$

f. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x^2+1}{-x^4+x}$

Exercice 4

Déterminer les limites ci-dessous :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{3x+2}{5-3x}$

b. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x^2+3x-1}{2x+1}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{3-2x}{x^2-4x+7}$

d. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{5x^2-3}{5-3x^2}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x^4+3x+1}{x^3-2x^2+4}$

f. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x^{100}-5x^{44}+x^{14}}{3x^{102}-5x^{56}}$

Exercice 5

Déterminer chacune des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} -5x^3-7x$

b. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 2x^3-3x^2$

c. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x^7-5x^6}{2}$

d. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x^5-x^3+2}{-2x^2-x+2}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x^3-x^2+5}{x^4+3x+1}$

f. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x^2-5x+2}{-3x^2+5x-1}$

4. Calcul de limites en un réel :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 6

Déterminer les limites ci-dessous :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto\frac{1}{2}^-} \frac{3}{2x-1}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 3^-} \frac{-2}{3-x}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto\frac{3}{2}^+} \frac{4-x}{3-2x}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 5^-} \frac{(x-5)(7-x)}{2x-10}$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 4^-} \frac{1}{\sqrt{8-2x}}$ f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto -2^-} \frac{3x^2+4x-4}{2x+4}$

Exercice 7

Déterminer, si possible, les limites ci-dessous :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^-} \frac{3x^4-2x^2}{5x^2-x}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^-} \frac{6x^{12}+5x^6-3x^2}{3x^8-5x^2}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{1}{x\sin x}$

Exercice 8

Parmi les limites proposées ci-dessous, déterminer celles représentant une forme indéterminée ; donner la valeur des autres limites :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{x^2+2}{x}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 2} \frac{x^2-4x+4}{2x^2+x-6}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto\frac{3}{2}^-} \sqrt{3-2x}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0} \frac{x^3-2x}{2x^2-3x+1}$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{5}{\sqrt{x^2+x}}$ f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 4^-} 5x+3-\frac{2}{x-4}$

Exercice 9

Déterminer les valeurs des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0} \frac{x^4-x^3}{x^2}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 2^+} \frac{x+5}{4-2x}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto -1} \frac{x+1}{x^2-1}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 3^+} \frac{x-5}{3x^2-11x+6}$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto\frac{1}{3}^+} \frac{3x^2+2x-1}{x-1}$ f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 2^+} \frac{-2x^2+7x-6}{x^2-4x+4}$

5. *Calculs de limites :*

(+4 exercices pour les enseignants)

Exercice 10

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto -\infty} \frac{2x^2+3x-1}{3x^3-2}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto\frac{1}{2}^+} \frac{3x-2}{-2x^2+7x-3}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto -2^-} \frac{2x-\sqrt{x+3}}{2+x}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 3} \frac{4x^2-12x+9}{-x^2+5x-6}$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto -\infty} x-\sqrt{2x^2+1}$ f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto +\infty} x-\sqrt{2x^2+1}$

Exercice 11

Déterminer, si possible, les limites ci-dessous :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{x^2-3}{x-\sqrt{x}}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 1^+} \frac{\frac{1}{x}-x^2}{x-1}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{1}{x\sin x}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto +\infty} \sqrt{x^2+1}-x$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto -3^-} \frac{\sqrt{6-x}-3}{2x^2+5x-3}$ f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{1}{x-x\sqrt{x}}$

Exercice 12

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{x^5-2x^2}{x^2+\sqrt{x}}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto +\infty} \sqrt{x^2-4}-x$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 4^-} \frac{4-2\sqrt{x}}{x-4}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto +\infty} \sqrt{x^3+2}-x$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{2x^2-4x+2}$

Exercice 13

Donner si possible la valeur des limites suivantes ; indiquer parmi celles-ci les formes indéterminées :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{1}{x-2}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 2} \frac{2x+1}{3x^2-3x-2}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto -5} \frac{x^2}{(x+5)^2}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto -2^-} \frac{1}{\sqrt{-x-2}}$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto +\infty} x^2-x+1$ f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto -1^+} \frac{x-3}{2x+2}$

6. *Asymptote horizontale et verticale :*

Exercice 14

En observant chacun des tableau de variations ci-dessous, écrire les limites correspondantes aux bornes de son ensemble de définition et préciser ci la fonction admet des asymptotes horizontales ou verticales :

a.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Variation de f	3	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

b.

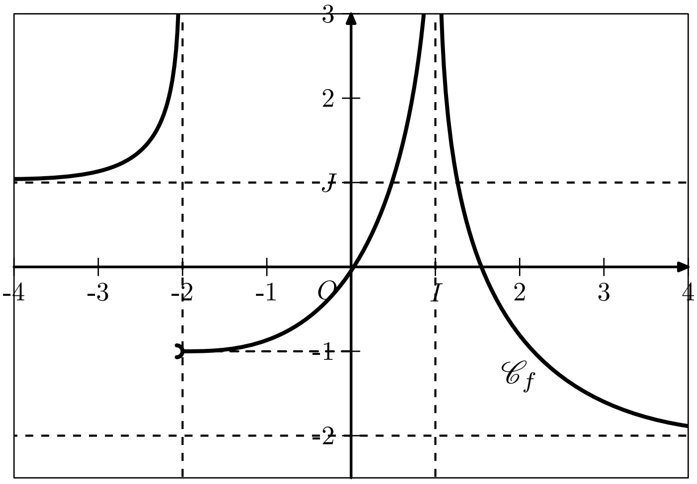
x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	-1 ‖ -1	$\nearrow$	$+\infty$

c.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
Variation de f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ 2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 15

Ci-dessous est représentée la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur l'intervalle $\left[-4\,;4\right]$:



Les asymptotes horizontales et verticales à la courbe $\mathscr{C}_f$ a été représentées en pointillés.

Dresser le tableau de variations complet de cette fonction.

7. Asymptote oblique :

(+3 exercices pour les enseignants)

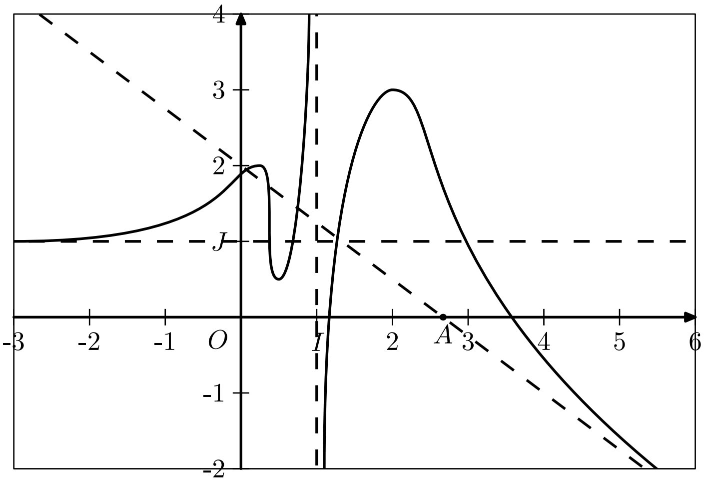
Exercice 16

1. On considère la fonction f définie dont l'image d'un nombre x est défini par :
$$f(x)=\frac{6x^3+x^2+7x+9}{2x^2-x+3}$$
Montrer que la droite (d) d'équation $y{=}3x{+}2$ est l'asymptôte à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et $+\infty$.

2. On considère la fonction g définie par la relation :
$$g(x)=\frac{4x^2-8x+5}{3-2x}$$
Déterminer les valeurs des nombres réels a et b vérifiant :
$$\lim_{x\mapsto+\infty}\left[g(x)-(a{\cdot}x+b)\right]=0$$

Exercice 17

Dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$, on a représenté la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\left[-3\,;6\right]\backslash\{1\}$



Les asymptôtes à la courbe $\mathscr{C}_f$ sont représentés en pointillées.

1. Préciser la nature et l'équation de chacune des asymptôtes à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Donner la valeur de chacune des limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto-\infty}f(x)\quad;\quad\lim_{x\mapsto1^+}f(x)\quad;\quad\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)$$

8. Asymptote oblique et étude :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 18

On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :
$$f(x)=\frac{4x^2+10x-2}{x+3}$$

1. Déterminer les limites de cette fonction aux bornes de son ensemble de définition.

2. a. Déterminer la valeur des trois nombres réels a, b, c vérifiant :
$$a{\cdot}x+b+\frac{c}{x+3}=\frac{4x^2+10x-2}{x+3}$$

   b. En déduire une expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

   c. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f *(n'oublier aucune valeur dans le tableau)*.

3. Déterminer l'équation de l'asymptote oblique en $+\infty$.

Exercice 19

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x)=\frac{6x^2+x+1}{2x+1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
   a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de f.
   b. Dresser le tableau de signes de la fonction f'.
   c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
   d. En étudiant les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition, compléter le tableau de variation.
2. Montrer que la fonction f admet en $-\infty$ et en $+\infty$ la droite (d) d'équation $y=3x-1$ pour asymptote oblique.

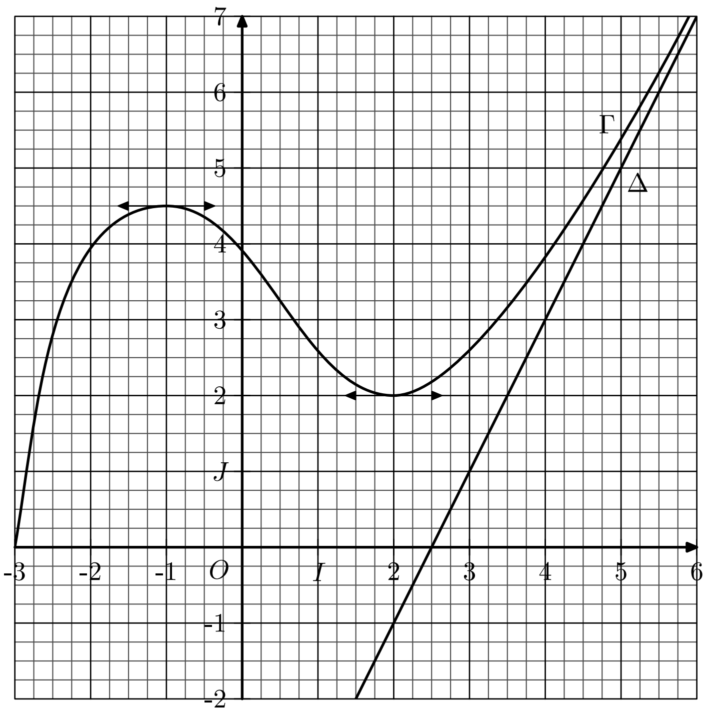
Exercice 20

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-3\,;+\infty[$, croissante sur les intervalles $[-3\,;-1]$ et $[2\,;+\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $[-1\,;2]$.

On note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[-3\,;+\infty[$.

La courbe Γ représentative de la fonction f est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

Elle passe par le point $A(-3\,;0)$ et admet pour asymptote la droite Δ d'équation $y=2x-5$



Les réponses ne seront pas justifiées.

Notation : une réponse exacte rapporte 0,5 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,25 *point l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est* 0.

1. L'équation $f(x)=4$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-3\,;+\infty[$.
2. $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=+\infty$
3. $\lim_{x\mapsto+\infty} \big|f(x)-(2x-5)\big|=+\infty$.
4. $f'(0)=1$
5. $f'(x)>0$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[-2\,;1]$

Exercice 21

Soit f a fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{2\cdot x}$$

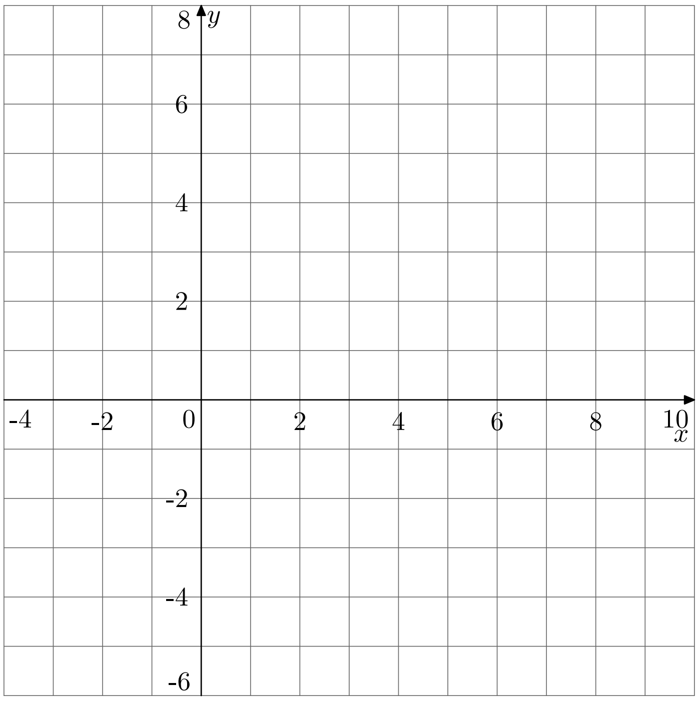
et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$.

1. a. Etudier les variations de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   b. Préciser les équations des asymptotes de $\mathscr{C}$ *(pour déterminer l'une de ces asymptotes, on étudiera* $\lim_{x\mapsto+\infty}\Big(f(x)-\frac{x}{\sqrt{3}}\Big)$*).*
   c. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.
2. a. Soit m un nombre réel et soit Δ la droite d'équation $y=m$. Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre de points d'intersection de Δ et de $\mathscr{C}$.
   b. Pour tout $m>\sqrt{2}$, on appelle A et B les points d'intersection de Δ et de $\mathscr{C}$. Soit I le milieu du segment $[AB]$. Montrer que, quand m décrit l'intervalle $]\sqrt{2}\,;+\infty[$, I décrit une partie, que l'on précisera, de la droite D d'équation $x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot y$.

10. Limites et fonctions homographiques :

Exercice 22

1. Dans le repère ci-dessous, tracer la courbe représentative de la fonction $f:x\longmapsto\frac{2+x}{x-3}$.



Voici un des paradoxes de Zénon d'Elée *(500 - 430 Avant Jésus Christ)* :

> "Il n'y a point de mouvement, car il faut que le mobile arrive au milieu de son parcours avant d'atteindre la fin"

2. a. Ainsi, nous allons nous déplacer sur une droite graduée du point $A(4)$ vers le point $B(3)$: on dira que c'est un déplacement vers la gauche mais également que l'on se dirige vers 3 mais en restant avec des valeurs supérieures à 3, on notera $x \longmapsto 3^+$. En se déplaçant à la manière de Zénon d'Elée, on notera :

- u_0 l'abscisse de position initiale : c'est à dire 4 ;
- u_1 l'abscisse de la moitié du parcours restant : 3,5 ;
- u_2 l'abscisse de la moitié du parcours restant : 3,25 ;

...

Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	4	3,5	3,25					

b. Vérifier, en vous servant des fonctions et du tableau de valeurs de votre calculatrice, que la valeur de u_n peut s'exprimer **en fonction** de la valeur de n par la relation *(fonctionnelle)* suivante :

$$u_n = 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

c. Donner, pour les trois premières précision demandée dans le tableau ci-dessous, à partir de quelle valeur de n, u_n est une valeur approchée de 3 :

Précision	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-10}
Valeur de n				

d. Pour utiliser cette formule dans le tableau, nous allons la transformer :

$$\left[3+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] - 3 < 0{,}5\times 10^{-10}$$

$$\left[\left[3+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] - 3\right]\times 10^{10} < 0{,}5$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \times 10^{10} < 0{,}5$$

Déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant cette l'inégalité.

e. Existe-t-il un n vérifiant $u_n = 3$?
Peut-on dire qu'il existe un rang N à partir duquel u_n devienne une valeur approchée de 3 à 10^{-100} près.
On notera que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = 3$. Cela signifie que la position u_n sera aussi proche que l'on souhaite de 3, pour autant qu'on augmente la valeur n.

3. a. Montrer que : $f(x) = 1 + \dfrac{5}{x-3}$

b. Soit n un nombre entier, on pose $x = 3 + \dfrac{1}{2^n}$. Donner l'expression de $f(x)$ en fonction de n. Simplifier cette écriture.

c. Compléter le tableau suivant à l'aide des valeurs exactes :

x	4	3,5	3,25	3,125	3,0625	3,03125
$f(x)$						

d. Que peut-on dire de la valeur de $f(x)$ lorsque x s'approche de plus en plus vers 3 par la gauche. On notera cette valeur $\lim\limits_{x\mapsto 3^+} f(x)$.

e. Que peut-on dire de la position relative de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $x=3$. On dira que la droite d'équation $x=3$ est une asymptote verticale à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$

4. Que peut-on dire de $\lim\limits_{x\mapsto 3^-} f(x)$; c'est à dire de la valeur limite de l'image de x lorsque x vers 3 par la droite *(en gardant des valeurs inférieures à 3)*.

Nous allons maintenant étudier le comportement de la fonction f lorsque x va tendre vers $+\infty$.

5. a. On considère la suite de nombre défini par $v_n = 3+2^n$. Compléter le tableau ci-dessous :

n	1	2	3	4	5
v_n					

b. Compléter le tableau suivant avec les valeurs exacte :

x	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
$f(x)$					

c. Que peut-on de la valeur de f lorsque x tend vers $+\infty$. On notera cette valeur $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ *(la valeur limite de l'image de x par la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$)*

d. Que peut-on dire de la position relative de la courbe relativement à la droite d'équation $y=1$? On dira que la droite d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

e. Imaginer rapidement quel sera la valeur de $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$

Exercice 23

On appelle fonction homographique toute fonction dont l'expression algébrique est de la forme $\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}$ avec a, b, c et d des nombres réels fixés.

1. a. Pour quel valeur de x cette fonction n'est pas définie.

   b. Que pouvez-vous dire dans le cas où $c=0$ et $d=0$.

On admet la proposition suivante :

> Toute fonction homographique $x \longmapsto \dfrac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}$ peut s'écrire sous la forme $x \longmapsto \alpha + \dfrac{\beta}{c\cdot x+d}$

2. Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer son ensemble de définition, ainsi que leurs valeurs de α et β :

$$g : x \longmapsto \frac{3x+2}{x+1} \quad ; \quad h : \longmapsto \frac{x}{1-2x}$$

$$k : x \longmapsto \frac{2x-4}{5+2x}$$

3. En déduire pour chacune d'elles l'équation de leurs asymptotes horizontales et verticales.

12. Exercices non-classés :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 24

Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer leur ensemble de définition puis aux bornes de leur ensemble de définition, déterminer les limites "*à gauche*" et "*à droite*".

$$f :\ x \longmapsto \frac{3x+1}{x-2} \quad ; \quad g :\ x \longmapsto \frac{1}{(2x-1)(3x+5)}$$

$$h :\ x \longmapsto \frac{x+2}{4x^2+4x+1} \quad ; \quad j :\ x \longmapsto \frac{2x-4}{x^2-1}$$

$$k :\ x \longmapsto \frac{x+2}{2x^2+5x+2}$$

Exercice 25

faire exercice de la forme limite en 0

$$\left(2x^2+x\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}\right)$$

et

$$\frac{2x^2+x}{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}}$$