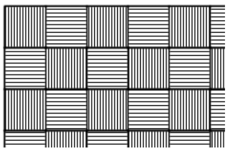
Hors programme lycée/Arithmétique

2. Pgcd avec l'algorithme euclidien :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 14

Dans une maison nouvellement construite, on veut carreler les sols de certaines pièces.



1. Le sol de la salle à manger est un rectangle de longueur $4{,}54\,m$ et de largeur $3{,}75\,m$. On veut carreler cette pièce avec des carreaux carrés de $33\,cm$ de côté.
   On commence la pose par un "*coin*" de la pièce comme le suggère la figure ci-contre. Calculer le nombre de carreaux non découpé qui auront été posés.

2. Le sol de la cuisine est un rectangle de longueur $4{,}55\,m$ et de largeur $3{,}85\,m$.
   On veut carreler cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe.
   a. Donner la liste des diviseurs de 455 puis la liste des diviseurs de 385.
   b. Donner la liste des diviseurs communs à 455 et 385.
   c. Quel est alors le plus grand côté possible des dalles carrées à utiliser pour carreler cette cuisine?

3. On dispose de dalles rectangulaires de longueur $24\,cm$ et de largeur $15\,cm$.
   a. Donner la liste des multiples de 24 inférieurs à 400, puis la liste des multiples de 15 inférieurs à 400
   b. Donner la liste des multiples comuns à 24 et 15, inférieurs à 400.
   c. Quelle serait la longueur du côté de la plus petite pièce carrée qui pourrait être carrelée avec un nombre entier de dalles de ce type, sans aucune découpe?

Exercice 3328

1. A l'aide de l'algorithme d'Euclide, compléter le tableau ci-dessous afin de déterminer le PGCD des nombrse 240 et 36 :

Dividende	Diviseur	Reste	
240	36	$\dots$	$240 = \dots \times 36 + \dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots = \dots \times \dots + \dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots = \dots \times \dots + \dots$

2. Rendre la fraction $\dfrac{240}{36}$ irréductible en effectuant une unique simplification. Par quel entier avez-vous simplifier? Justifier votre démarche.

Exercice 4995

1. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide le $PGCD$ des entiers 410 et 246 :

Dividende	Diviseur	Reste	
410	246	$\dots$	$410 = \dots \times 246 + \dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots = \dots \times \dots + \dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots = \dots \times \dots + \dots$

2. a. Simplifier la fraction $\dfrac{246}{410}$.
   b. Effectuer les calculs suivants :
   $\dfrac{246}{410} - \dfrac{8}{5}$; $\dfrac{1}{246} - \dfrac{1}{410}$

Exercice 3329

1. Calculer le Plus Grand Commun Diviseur *(PGCD)* de 496 et de 806.
2. Ecrire $\dfrac{496}{806}$ sous la forme d'une fraction irréductible.
3. Calculer $\dfrac{496}{806} - \dfrac{3}{26}$
   (on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible)

Exercice 6077

On considère l'équation (E) :
$44{\cdot}x + 35{\cdot}y = 2 \qquad x \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{N}$

1. a. A l'aide de l'algorithme d'Euclide, montrer que les entiers 44 et 35 sont premiers entre eux.
   b. Déterminer un couple $(x_0\,;y_0)$ vérifiant la relation : $44{\cdot}x_0 + 35{\cdot}y_0 = 1$
2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équations (E).

3. Entiers, PGCD, PPCM :

Exercice 259

1. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers naturels suivants :

a. 25×72 b. 54×12

c. 32×84 d. 100×98

2. Déduire de la question 1., déterminer :

a. Le PGCD du couple $(25\times72\,;54\times12)$;

b. Le PPCM du couple $(32\times84\,;100\times98)$ d'entiers naturels.

3. Utiliser un arbre de diviseurs pour déterminer l'ensemble des diviseurs de l'entier 315.

Exercice 277

1. Déterminer les décompositions en facteurs premiers des entiers suivants :

a. 36×54 b. 125×134 c. 280×24

2. En déduire le PGCD et le PPCM du couple $(6720\,;16750)$ d'entiers naturels.

5. *Développement illimité :*

Exercice 1822

On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme $u_0=2$ et de raison 3.

1. a. Déterminer les termes u_1, u_2, u_3 et u_4.

b. Donner l'écriture en base 7 de u_2.

c. Montrer que l'écriture en base 7 est $\overline{105}^7$.

d. Pour obtenir l'écriture en base 7 de u_4, un élève a effectué la multiplication ci-dessous. Dire s'il a ou non raison et expliquer pourquoi.

$$\begin{array}{r} 105 \\ \times\quad 3 \\ \hline 315 \end{array}$$

2. a. Montrer que : $u_5=486$.

b. On considère la fonction f, extrait d'un algorithme, et prenant pour argument a un entier naturel :

```
t
Fonction f(a)
    L ← liste vide
    x ← a
    Tant que  x>0
        r ← reste de la division
                euclidienne de x par 7
        Ajouter r en tête de la liste L
        x ← q
    Fin Tant
    Renvoyer L
```

Compléter le tableau ci-dessous afin d'y inscrire les différentes valeurs prises par les variables de la fonction f lors d'un appel à la fonction f à l'aide du paramètre $a=486$:

	r	q	L	x
Initialisation			vide	486
Fin étape 1				
Fin étape 2				
...				
...				

Expliquer le lien entre les éléments de la liste L et l'écriture de u_5 en base 7.

3. On a divisé le terme u_{10} de la suite (u_n) par un certain entier. On obtient le quotient Q dont l'écriture décimale est $Q=14{,}727\,272\,727\,272\,72...$ écriture dans laquelle les chiffres 7 et 2 se répètent à l'infini.

On note (v_n) la suite géométrique de premier terme 0,72 et de raison 0,01.

a. Calculer $v_0+v_1+v_2$

b. On pose $S_n=v_0+v_1+v_2+\cdots+c_n$ où n est un entier naturel non nul.

c. Calculer S_n. En déduire $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} S_n$.

d. En déduire une écriture de $0{,}727\,272\ldots$ où les chiffres 7 et 2 se répètent à l'infini sous la forme du quotient de deux entiers. Quel est le nombre par lequel on a divisé u_{10}?

8. *Théorème de Bezout et algorithme d'Euclide :*

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 3753

1. Déterminer un couple $(x\,;y)$ d'entiers solution de l'équation :

$56{\cdot}x+45{\cdot}y=1$

2. En déduire un couple $(x'\,;y')$ d'entiers relatifs vérifiant l'égalité :

$56{\cdot}x'+45{\cdot}y'=3$

255. *Exercices non-classés :*

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 5302

Le but de cet exercice est de démontrer par l'absurde qu'il existe une infinité de entiers premiers de la forme $4n-1$, où n est un élément de $\mathbb{N}^*$ *(ensemble des entiers naturels non nuls)*.

1. Soit E l'ensemble des entiers premiers de la forme $4n-1$ où n est un élément de $\mathbb{N}^*$.
   Montrer que E a au moins deux éléments.

2. *On suppose E fini.* Soit P le produit de tous les éléments de E et $X=4P-1$.

   a. Trouver un minorant de X.

   b. Montrer que X n'est pas divisible par 2, et en déduire que tout facteur premier de X est soit de la forme $4n+1$, soit de la forme $4n-1$ où n est un élément de $\mathbb{N}^*$.

   c. Montrer que X possède au moins un facteur premier de la forme $4n-1$ où n est un élément de $\mathbb{N}^*$

3. En considérant un facteur premier p de X de la forme $4n-1$, la définition de P et la relation $X=4P-1$, achever la démonstration par l'absurde.

