Hors programme lycée/Angles orientés

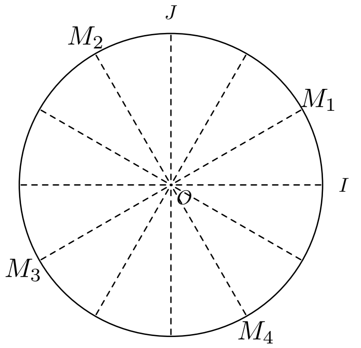
1. Intervalle d'angles orientées :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 2199

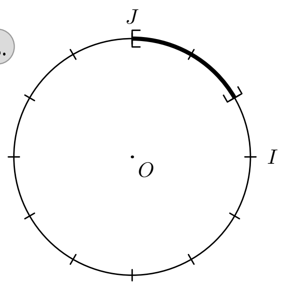
Dans l'ensemble de cet exercice, le cercle trigonométrique a été partagé en 12 parties égales.

1. Déterminer la mesure, en radian, des angles $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM_i}\right)$ pour $i=1,\ldots,4$.

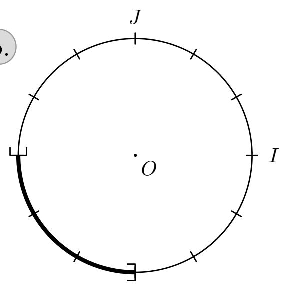


2. Pour chaque question, une partie du cercle trigonométrique a été surlignée. Ecrire, sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles, l'ensemble des mesures de l'angle $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ lorsque M décrit chacune de ces parties :

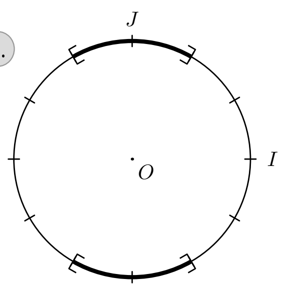
a.



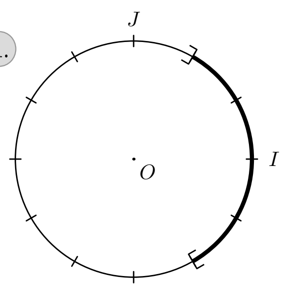
b.



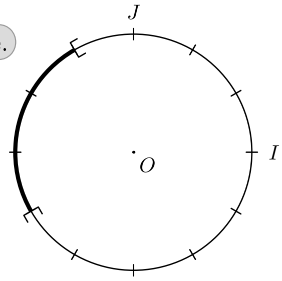
c.



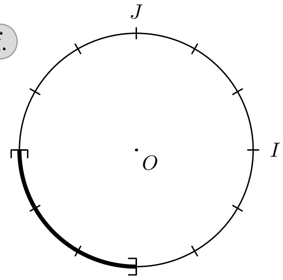
d.



e.

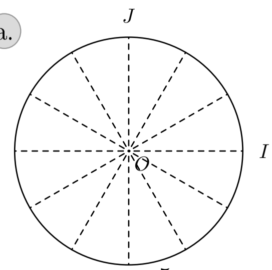


f.



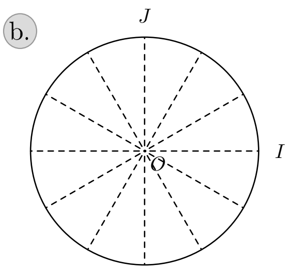
3. Pour chaque question, surligner l'ensemble des points M du cercle dont l'angle $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ appartient à l'intervalle indiqué :

a.



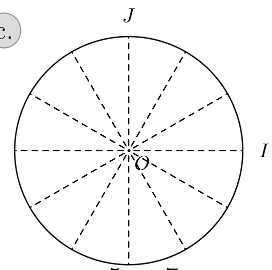
$\left[\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{5\pi}{6}\right]$

b.



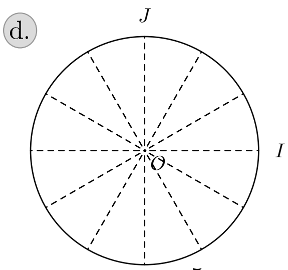
$\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,-\frac{\pi}{6}\right]$

c.



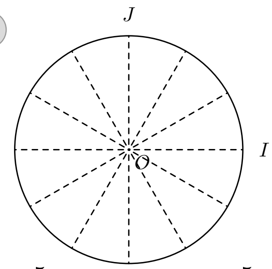
$\left[\frac{5\pi}{6}\,;\,\frac{7\pi}{6}\right]$

d.



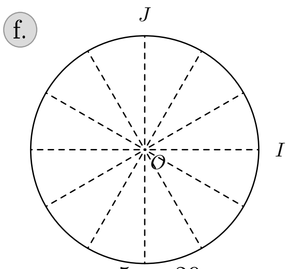
$\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}\,;\,\pi\right]$

e.



$\left[\frac{5\pi}{6}\,;\,\pi\right]\cup\left[-\pi\,;\,-\frac{5\pi}{6}\right]$

f.



$\left[\frac{5\pi}{2}\,;\,\frac{29\pi}{6}\right]$

2. Lieu géométrique et angles orientées :

(+4 exercices pour les enseignants)

Exercice 2202

Soit A et B deux points fixés du plan. Déterminer le lieu géométrique des points M vérifiant les relations suivantes : faire une représentation d'une telle situation en précisant les emplacement possibles du point M.

a. $\left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}\right)=\pi+2k\pi$

b. $\left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}\right)=0+2k\pi$

c. $\left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

d. $\left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}\right)=-\frac{\pi}{2}+k\pi$

e. $\left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}\right)=\pi+k\pi$

Exercice 2212

 BY-NC

1. a. Compléter le tableau ci-dessous :

k	-2	-1	0	1	2
$\frac{\pi}{3}+k\pi$					

b. Sur un des cercles trigonométrique ci-dessous, représenter l'ensemble des points M vérifiant la relation :

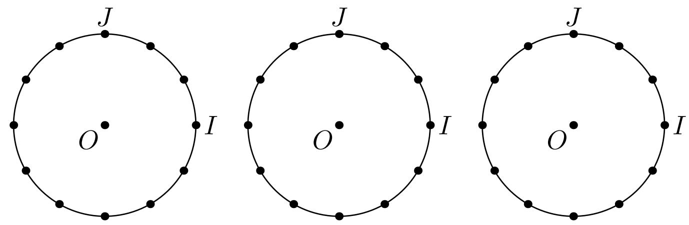
$$\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right) = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad \text{où } k\in\mathbb{Z}.$$

2. Dans chaque cas, représenter l'ensemble des points M vérifiant la relation précisée :

a. $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{3}$

b. $2\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right) = \frac{-2\pi}{3} + k\pi$

Les cercles suivants ont été partagés en douze parties égales.



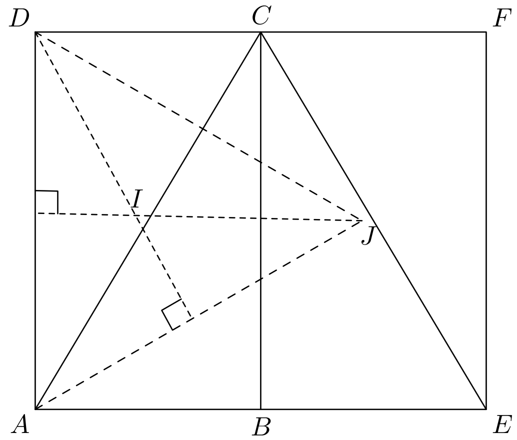
3. Géométrie plane et Relation de Chasles :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 2797

On considère un triangle AEC équilatéral inscrit dans le rectangle $AEFD$. A l'intérieur du rectangle, on trace le triangle équilatéral DAJ ; on note I sont centre.

Attention, la figure ci-dessous n'a pas été tracée correctement ; le but de l'exercice est de montrer que les point I et J appartiennent respectivement aux segments $[AC]$ et $[BC]$.



On utilisera la propriété suivante :

$$\left(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right) = \left(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{w}\right)$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{v} \text{ et } \overrightarrow{w} \text{ sont colinéaires et de même sens.}$$

1. a. Justifier que : $\left(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{6}$.

b. Justfier que l'angle au centre $\left(\overrightarrow{IA}\,;\,\overrightarrow{ID}\right)$ mesure $\frac{2\pi}{3}$.

c. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

2. a. Justifier que le triangle DCJ est isocèle en C.

b. En déduire la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CJ}\right)$.

c. En déduire que les points J, E, C sont alignés.

4. Equations et congruences :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 2226

1. Résoudre dans l'intervalle $\left]-\pi\,;\pi\right]$ des mesures principales les équations suivantes :

a. $2\sin 2x = 1$ b. $\cos 3x = 1$

2. Résoudre dans l'intervalle $\left]-\pi\,;\pi\right]$ des mesures principales les équations suivantes :

a. $\sin 2x = \sin x$ b. $\cos 2x = \cos x$

Exercice 2625

Lorsque k décrit l'ensemble $\mathbb{Z}$, alors l'expression $\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}$ décrit un ensemble de nombre qu'on note E et qui peut s'écrire sous la forme :

$$E=\left\{\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}\;\middle|\;k\in\mathbb{Z}\right\}$$

1. Donner les mesures principales des angles représentés par cet ensemble.

2. Vérifier que chaque nombre de l'ensemble E vérifie l'équation : $\cos 2x=0$

Exercice 2967

1. a. Résoudre l'équation : $2x^2+7x+3=0$.

b. Résoudre l'équation ci-dessous dans $\left]-\pi\,;\pi\right]$:

$$\sin 2x = -\frac{1}{2}$$

2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation :

$$2\cdot\left(\sin 2x\right)^2+7\cdot\sin 2x+3=0$$

 BY-NC

5. Inéquations :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 2227

En s'aidant d'une représentation graphique du cercle trigonométrique, déterminer l'ensemble des solutions dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ des mesures principales les inéquations suivantes :

a. $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ b. $2\sin x \leqslant 1$ c. $\cos x < -\frac{1}{2}$

Exercice 2232

En s'aidant d'une représentation graphique du cercle trigonométrique, déterminer l'ensemble des solutions dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ des mesures principales les inéquations suivantes :

a. $\cos x > 0$ b. $\sin x > 0$ c. $\sin x < -\frac{1}{2}$

8. Repérage polaire et cartésien :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 2265

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé. Chaque point ci-dessous est présenté avec ses coordonnées cartésiennes $(x\,;y)$.

Déterminer les coordonnées polaires $[\rho,\theta]$ associées *(donner une valeur approchée au dixième le cas échéant)* :

a. $M\left(-3\,;-\sqrt{3}\right)$ b. $N(2\,;-2)$

c. $P\left(\sqrt{6}\,;-\sqrt{2}\right)$ d. $Q(5\,;2)$

Exercice 2266

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé.

1. Chaque point ci-dessous est présenté avec ses coordonnées polaires $[\rho\,;\theta]$.

   Déterminer les coordonnées cartésiennes de chacun de ses points : *(donner une valeur approchée au dixième le cas échéant)* :

   a. $M\left[3\,;\frac{\pi}{4}\right]$ b. $N\left[2\,;-\frac{\pi}{6}\right]$

   c. $P\left[3\sqrt{2}\,;\frac{5\pi}{6}\right]$ d. $Q\left[10\,;-\frac{\pi}{12}\right]$

2. On considère le point R de coordonnée polaire $[4\,;\theta]$ tel que $\tan\theta=\sqrt{3}$. Peut-on déterminer de manière unique les coordonnées cartésiennes du point R.

Exercice 2908

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$:

1. On considère les deux points A et B définis par leurs coordonnées cartésiennes :

   a. $A\left(-3\sqrt{3}\,;3\right)$ b. $B\left(-\frac{1}{10}\,;-\frac{\sqrt{3}}{10}\right)$

   Déterminer les coordonnées polaires de ces deux points.

2. On considère les deux points C et D définis par leurs coordonnées polaires :

   a. $C\left(\frac{1}{4}\,;-\frac{3\pi}{4}\right)$ b. $D\left(\sqrt{15}\,;\frac{\pi}{6}\right)$

   Déterminer les coordonnées cartésiennes de ces deux points.

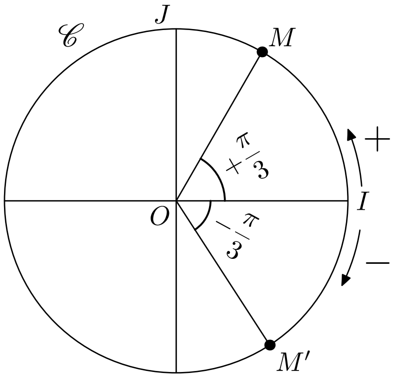
9. Angles orientés :

Exercice 810

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;I\,;J)$, on considère le cercle de centre O et de rayon 1 appelé **cercle trigonométrique**.

Tout point M définit un angle géométrique $\widehat{IOM}$.

Le sens de parcours du cercle trigonométrique permet de caractériser tout point du cercle par son angle géométrique :



- l'angle est positif si l'arc $\widehat{IM}$ est orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
- l'angle est négatif si l'arc $\widehat{IM}$ est orienté dans le sens des aiguilles d'une montre.

Dans la représentation ci-dessus :

- On a : $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)=+\frac{\pi}{3}$ rad

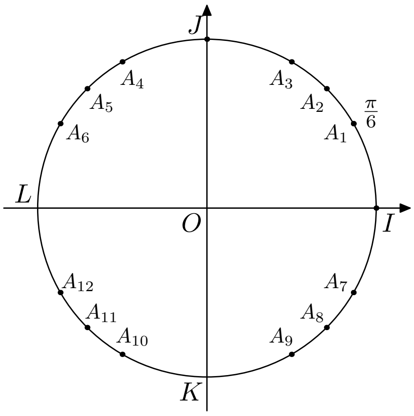
  Dans le cercle trigonométrique, on note $M\left(+\frac{\pi}{3}\right)$.

- On a : $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM'}\right)=-\frac{\pi}{3}$ rad

  Dans le cercle trigonométrique, on note $M'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

 BY-NC

1. Dans la figure ci-dessous, les points A_i définissent un angle orienté $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA_i}\right)$ ayant une mesure "*remarquable*".
Pour chacun des points, indiquer la mesure de l'angle associérajouter le signe permettant de repérer chaque point marqué du cercle trigonométrique :



2. Dans le cercle trigonométrique ci-dessus, placer sur cette figure les points N, P, Q, R, S, T réalisant les mesures suivantes :

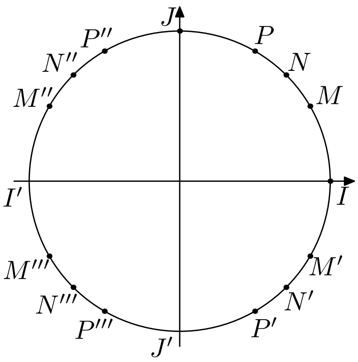
a. $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{ON}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$ rad b. $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OP}\right)=\dfrac{5\pi}{6}$ rad

c. $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OQ}\right)=-\dfrac{2\pi}{3}$ rad d. $\left(\overrightarrow{OK};\overrightarrow{OR}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$ rad

e. $\left(\overrightarrow{OK};\overrightarrow{OS}\right)=\dfrac{\pi}{6}$ rad f. $\left(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OT}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$ rad

Exercice 5464

Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$, on considère le cercle trigonométrique représenté ci-dessous sur lequel est placé plusieurs points :
Les points M, N, P vérifient les mesures suivantes :
$\widehat{IOM}=30^o$; $\widehat{ION}=45^o$
$\widehat{IOP}=60^o$



1. Donner la mesure des angles repérant les points M, N, P en radians.

2. Les points M', N', P' sont respectivement les symétriques des points M, N, P par rapport à l'axe (OI) :

a. Que peut-on dire de $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM'}\right)$?

b. Donner la mesure en radians des angles suivants :
$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM'}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{ON'}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OP'}\right)$

3. Les points M'', N'' et P'' sont respectivement les symétriques des points M, N, P par rapport à l'axe (OJ) :

a. Que peut-on dire de $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM''}\right)$?

b. Donner la mesure en radians des angles suivants :
$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM''}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{ON''}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OP''}\right)$

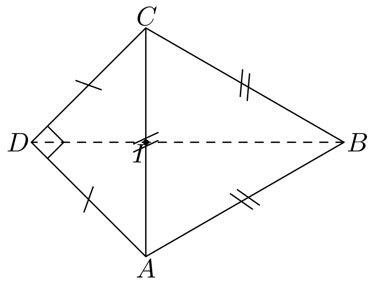
4. Les points M''', N''' et P''' sont respectivement les symétriques des points M, N, P par rapport à l'axe (OJ) :

a. Quelle relation algébrique vérifie les deux angles :
$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM'''}\right)$

b. Donner la mesure en radians des angles suivants :
$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM'''}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{ON''}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OP''}\right)$

Exercice 5465

On considère le quadrilatère $ABCD$ représenté ci-dessous qui est constitué de deux triangles ABC et ACD respectivement équilatéral et isocèle rectangle en D.

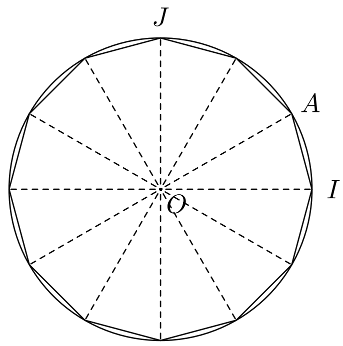


A l'aide des points de cette figure et pour chaque question, donner un angle orienté réalisant les mesures suivantes :

a. $\dfrac{\pi}{3}$ rad b. $-\dfrac{\pi}{4}$ rad c. $-\dfrac{\pi}{6}$ rad d. $\dfrac{7\pi}{12}$ rad

Exercice 2153

On considère le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ ci-dessous où est inscrit un dodécagone *(polygone régulier à 12 côtés)*



1. Déterminer la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)$

2. Placer sur le cercle $\mathscr{C}$ les points M, N, P tels que :

a. $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$ rad b. $\left(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{ON}\right)=-\dfrac{\pi}{6}$ rad

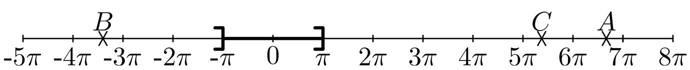
c. $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OP}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ rad c. $\left(\overrightarrow{OQ};\overrightarrow{OJ}\right)=-\dfrac{5\pi}{6}$ rad

10. Mesures principales :

(+5 exercices pour les enseignants)

Exercice 2738

On considère la droite graduée ci-dessous où sont placés les points $A\left(\dfrac{20}{3}\pi\right)$, $B\left(-\dfrac{17}{5}\pi\right)$ et $C\left(\dfrac{43}{8}\pi\right)$.



1. a. Graphiquement, déterminer le nombre de fois dont on doit enlever $2\cdot\pi$ à l'abscisse du point A afin d'obtenir la mesure principale de ce nombre?

b. En déduire la mesure principale de $\dfrac{20}{3}$.

2. Déterminer la mesure principale des abscisses des points B et C.

Exercice 2201

 BY-NC

Déterminer la mesure principale des angles orientés de mesure suivante :

a. $\dfrac{9\pi}{4}$ b. $\dfrac{192\pi}{6}$ c. $-\dfrac{5\pi}{4}$

d. $-\dfrac{33\pi}{2}$ e. $\dfrac{16\pi}{7}$ f. $\dfrac{52\pi}{3}$

Exercice 2737

1. On se propose, dans cette question, de déterminer la mesure principale de l'angle $\alpha = \dfrac{73}{5}\pi$:

   a. Soit k un entier relatif réalisant l'encadrement suivant :
   $$-\pi < \frac{73}{5}\pi + 2\cdot k\cdot\pi \leqslant \pi$$
   Réaliser un encadrement de k à l'aide de l'encadrement ci-dessus.

   b. A l'aide de la calculatrice, déterminer l'unique nombre entier k réalisant cet encadrement.

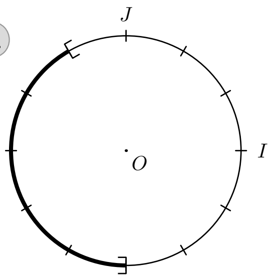
   c. En déduire la mesure principale de l'angle α.

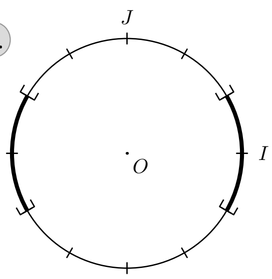
2. De la même manière, déterminer la mesure principale des angles suivants :

   a. $-\dfrac{29}{3}\pi$ b. $-\dfrac{27}{4}\pi$ c. $\dfrac{70}{9}\pi$

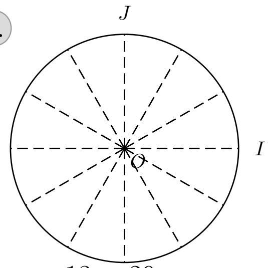
Exercice 2799

1. Donner, sous forme de réunions d'intervalles, l'ensemble formé par les mesures principales des angles repérant les points surlignés du cercle trigonométrique :

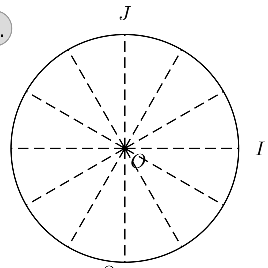
   a.


   b.


2. Pour chaque question, surligner l'ensemble des points ayant pour angle orienté l'ensemble précisé sous le cercle trigonométrique :

a.


$\left[\dfrac{13\pi}{3} ; \dfrac{29\pi}{6}\right]$

b.


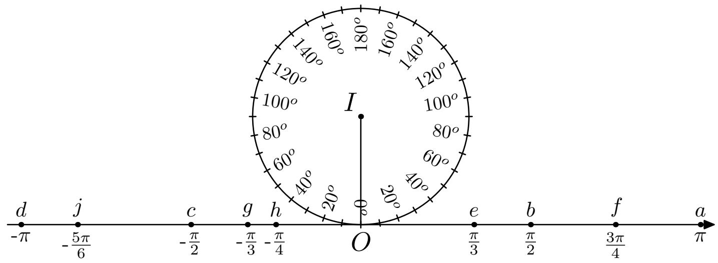
$\left[\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{8\pi}{3}\right]$

Exercice 4920

On considère une droite graduée d'origine O sur laquelle est placé des points définis par leur abscisse :

$a\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$; $b(\pi)$; $c\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$; $d(-\pi)$; $e\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

$f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$; $g\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$; $h\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$; $j\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$



On considère le cercle $\mathscr{C}$ de rayon 1 placé sur la droite graduée comme l'indique la figure précédente.

1. a. Soit M un point de $\mathscr{C}$ tel que l'arc $\widehat{OM}$ mesure π.
   Donner la mesure de l'angle $\widehat{OIM}$

   b. Placer l'unique point A du cercle $\mathscr{C}$ tel que l'arc $\widehat{OA}$ ait pour longueur π.

2. a. Soit M un point de $\mathscr{C}$ tel que l'arc $\widehat{OM}$ mesure $\dfrac{\pi}{2}$.
   Donner la mesure de l'angle $\widehat{OIM}$

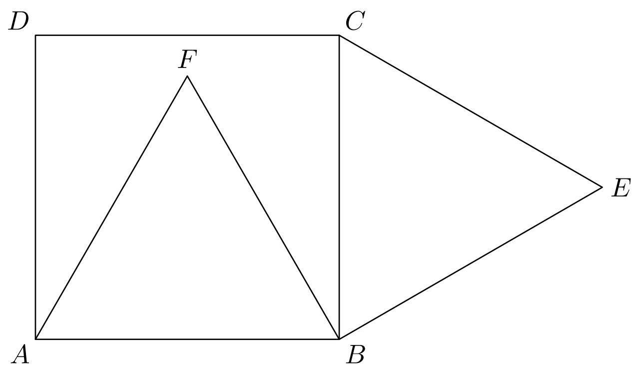
   b. Placer les deux points B et C appartenant au cercle $\mathscr{C}$ tel que les arcs $\widehat{OB}$ et $\widehat{OC}$ aient pour longueur $\dfrac{\pi}{2}$.

3. De même, placer les points E, F, G, H, J tels que les arcs $\widehat{OE}$, $\widehat{OF}$, $\widehat{OG}$, $\widehat{OH}$, $\widehat{OJ}$ aient respectivement la même longueur que l'abscisse des points e, f, g, h, j.

11. *Angles oriéntés et algèbre :* *(+2 exercices pour les enseignants)*

Exercice 2233

On considère le carré $ABCD$.
Soit le point E extérieur au carré tel que BCE soit équilatéral.
Soit F le point intérieur au carré tel que le triangle ABF soit équilatéral.



On souhaite montrer que les points D, F et E sont alignés.

1. a. Donner la mesure des deux angles orientés suivants :

 CC BY-NC

$\left(\overrightarrow{AF}\,;\overrightarrow{AD}\right)$; $\left(\overrightarrow{DF}\,;\overrightarrow{DA}\right)$

b. En déduire la mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DF}\right)$.

2. a. Donner la mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CE}\right)$.

b. En déduire la mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DE}\right)$.

3. En déduire que les points D, F et E sont alignés.

Les questions suivantes ont pour objectif d'utiliser la relation de Chasles.

4. Détermmminer la mesure des angles orientés :

a. $\left(\overrightarrow{BE}\,;\overrightarrow{CF}\right)$ b. $\left(\overrightarrow{AF}\,;\overrightarrow{CE}\right)$

 BY-NC