

# Hors programme lycée/Algèbre

## 1. Domaine de résolution, de définition :

(+2 exercices pour les enseignants)

### Exercice 4389



On souhaite résoudre l'équation : (E) :  $\frac{(x-2)x}{x+1} = \frac{2x^2+1}{x+1}$

1. Quel est le domaine de résolution de cette équation?

2. Pour  $x \neq -1$ , établir l'égalité suivante :

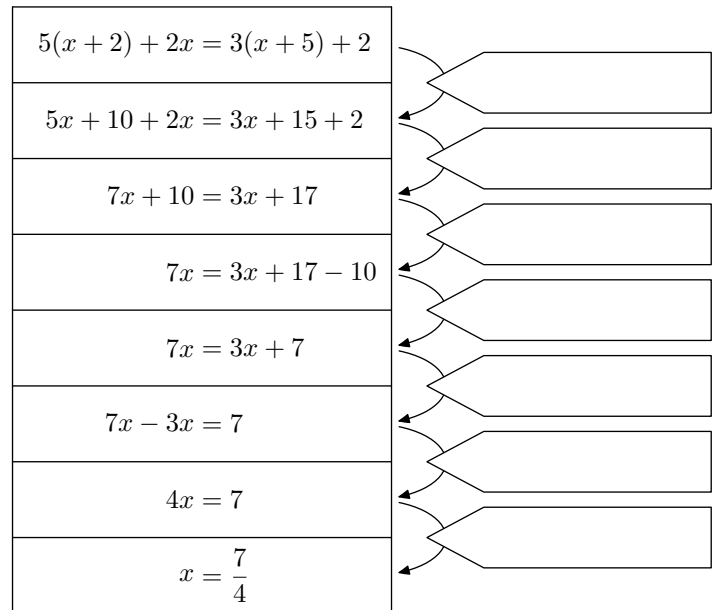
$$\frac{2x^2+1}{x+1} - \frac{(x-2)x}{x+1} = x+1$$

3. Que peut-on dire de l'ensemble des solutions de (E)?

### Exercice 4402



Le diagramme ci-dessous présente les étapes de la résolution algébrique d'une équation.



Décrire succinctement chacune de ces étapes en indiquant dans les étiquettes l'action mathématique réalisée (*factorisation, développement, soustraction...*).

## 3. Développement :

### Exercice 6994



Donner la forme développée réduite des expressions suivantes :

antes :

a.  $(2x+1)(x+2)$

b.  $(x-1)(2x+2)$

c.  $(-2-x)(3x+1)$

d.  $(2x+3)^2$

## 4. Factorisation :

### Exercice 4413



La factorisation d'un polynôme  $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  du second degré dépend de la valeur de son discriminant :

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Aucune factorisation	$a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$	$a \cdot (x - \alpha)(x - \beta)$ où $\alpha$ et $\beta$ sont les deux racines du polynôme

Factoriser, si possible, les expressions suivantes :

a.  $x^2 + 4x + 3$       b.  $5x^2 - 4x - 1$       c.  $3x^2 + 4x + 1$

d.  $4x^2 + 3x + 4$       e.  $12x^2 + 36x + 27$       f.  $3x^2 + 3x + 4$

### Exercice 4414



On considère le polynôme du second degré (E) :  $x^2 + 3x + 3$ .

1. Déterminer le discriminant du polynôme (E).

2. En effectuant un raisonnement par l'absurde et en supposant que l'expression (E) admette la forme factorisée :  
(E) :  $a(x - \alpha)(x - \beta)$   
Établir que l'expression (E) n'admet pas de forme factorisée.

### Exercice 4425





Factoriser les expressions suivantes :

- a.  $(x-1)(2x+1) - (2x-2)(5-2x)$   
 b.  $(2+x)(3-x) + (5-2x)(3-x)$   
 c.  $3(4+2x) - (3+x)(10+5x)$   
 d.  $(2-x)(3x-4) + \left(2 - \frac{3}{2}x\right)(2x+3)$   
 e.  $(2x+1)^2 - 4(2-3x)^2$   
 f.  $18x^2 - 24x + 8 + (3x-2)(2-x)$

**Exercice 4424**  

Factoriser les expressions suivantes :

- a.  $(3x-1)(2x+1) + (5-x)(2x+1)$   
 b.  $x(2-x) + (3x+1)(2-x)$   
 c.  $(x+1)(x-1) - (2x+3)(x-1)$   
 d.  $(3x+4)(2x-1) + 4(3x+4)$   
 e.  $(2x+4)(3-3x) + (2x+4)$   
 f.  $(x+1)(3-2x) + (3-2x)^2$

**Exercice 4613**  

**Rappels :**

L'opposé de l'expression  $3x-4$  peut s'exprimer avec les deux formes suivantes :  $-3x+4$  ;  $4-3x$

L'opposé du produit  $a \times b$  peut s'exprimer avec les deux formes :  $(-a) \times b$  ;  $a \times (-b)$

Attention, le produit  $(-a) \times (-b)$  est **égal** au produit  $a \times b$ .

**Applications :**

- Dans l'expression  $(3x-4)(5x+1) + (4-3x)(2-2x)$ , le facteur commun est  $3x-4$ .
- On a les transformations successives :  $(2-x)(x-4) = [-(x-2)](x-4) = (x-2)(4-x)$

**5. Equations :**

(+7 exercices pour les enseignants)

**Exercice 454**   

Résoudre l'équation suivante :  $\frac{2x-2}{x-1} = \frac{3x+3}{2x+1}$

**Exercice 464**  

Pour chacune des équations suivantes, donner l'ensemble de résolution de l'équation, puis résoudre l'équation :

- a.  $\frac{9x^2 + 6x + 1}{x-1} = 0$       b.  $\frac{1-x}{3x+2} - \frac{1}{2(x+1)} = 0$   
 c.  $\frac{1}{2x+1} = \frac{1}{3-x}$       d.  $\frac{x^2-9}{x^2-1} = 0$

**Exercice 448**  

On considère les deux équations suivantes :

(E) :  $\frac{x^2 + 2x + 1}{x-1} = 0$  ; (F) :  $\frac{x-5}{x-1} + \frac{4}{x+1} = 0$

1. a. L'équation (E) est-elle définie pour  $x=1$ ?

Factoriser les expressions suivantes :

- a.  $(3x-4)(5x+1) + (4-3x)(2-2x)$   
 b.  $(x-2)(2x+3) + (2-x)(x-4)$

**Exercice 4612**  

1. Factoriser les expressions suivantes :

- a.  $3x+6$       b.  $2x-8$       c.  $27x+18$

2. Factoriser les expressions suivantes :

- a.  $(x+2)(x-3) + (3x+6)(2x-1)$   
 b.  $(3x+6)(x-4) - (2x-8)(x-2)$   
 c.  $(2x+7)(27x+18) - (5-x)(3x+2)$

**Exercice 6995**  

**Rappel :** lorsque les coefficients d'un polynôme sont des multiples d'un même nombre, une factorisation est possible.

**Exemple :**

•  $2x+2 = 2 \cdot (x+1)$       •  $6x-3 = 3 \cdot (2x-1)$

Factoriser les expressions suivantes :

- a.  $(x+1)(2x-1) + (2x+2)(3x+2)$   
 b.  $(6x-3)(x+1) + (2x-1)(x+2)$   
 c.  $(9x-3)(3x+1) - (x-2)(3x-1)$   
 d.  $(2x+2)^2 + (x+1)$

- b. Pour quelles valeurs de  $x$ , l'équation (F) n'est pas définie?

2. Résoudre chacune de ces deux équations.

**Exercice 4473**  

Résoudre les équations suivantes :

- a.  $\frac{-3x-3}{3x+4} + \frac{2x+2}{2x+1} = 0$       b.  $\frac{3-x}{4x+3} + \frac{2x-3}{3x+3} = 0$   
 c.  $\frac{2x-3}{3x+1} + \frac{3-2x}{x+4} = 0$       d.  $\frac{x-3}{x+2} + \frac{x+2}{3x+1} = 0$

**Exercice 2858**  

Résoudre les équations suivantes :

a.  $(3x + 1)(1 - 3x) + (6x + 2)(3x - 1) = 0$

b.  $(6x + 1)(3x + 1) + (2x + 1)(2 - 9x) = 0$

c.  $\frac{x + 2}{-3x - 3} + \frac{x + 2}{4x + 5} = 0$

d.  $(x + 1)(3x - 2) = (x + 1)^2$

**Exercice 4551**  

1. Factoriser les expressions suivantes :

a.  $(3x + 2)(5x - 1) - (2 - 10x)(2 - 4x)$

b.  $(x + 3)(3x + 6) + (4x + 8)^2$

c.  $(2x + 3)(5x - 4) - (2x - 2)(6 - x)$

d.  $(x - 3)(-3x - 3) - (2x + 2)(3 - 3x)$

2. Résoudre les équations suivantes :

a.  $(5x + 2)(4x - 3) = (2x - 1)(3 - 4x)$

b.  $(2 - 3x)(2x - 4) + (10 - 5x)(3x - 1) = 0$

c.  $(x - 3)(2x - 3) = (2x - 2)(x + 3)$

d.  $(x - 3)(2x - 3) = (3 - 3x)(2x - 3)$

3. Résoudre les équations suivantes :

a.  $\frac{x + 3}{3x + 2} = \frac{x - 2}{3x + 3}$

b.  $\frac{x - 1}{x + 2} + \frac{x + 3}{2x + 3} = 0$

**Exercice 4547**  

Résoudre les équations suivantes :

a.  $(4x + 2)(3x - 1) + x(6x + 3) = 0$

b.  $(x + 3)^2 = 2(2x + 6)(3x - 2)$

c.  $(-5x - 4)(2x + 1) = (-4x - 3)(3x + 2)$

d.  $(1 - 5x)(2x + 1) = (1 - 3x)(3x + 2)$

**6. Inéquations :**

(+2 exercices pour les enseignants)

**Exercice 4404**  

Résoudre les inéquations suivantes :

a.  $(2x + 1)(x + 2) < 0$

b.  $(3 - x)(2x + 1) \geq 0$

c.  $(5x + 1)(x - 2) > (3 + x)(x - 2)$

d.  $(x + 3)(5 - x) \leq 2(x + 3)$

**Exercice 4452**  

Compléter le tableau de signes de chacune des expressions  $E$  :

1.

$x$	$-\infty$	$-3$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x + 1$			0	
$3 + x$		0		
$E = (2x + 1)(3 + x)$		0	0	

2.

$x$	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	$2$	$+\infty$
$x - 2$				
$4x - 3$				
$E = (x - 2)(4x - 3)$				

3.

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$2 + x$		
$2 - x$		
$E = (2 + x)(2 - x)$		

**Exercice 7219**  

1. Factoriser les expressions suivantes :

a.  $(x + 3)(2x - 1) - (3x + 1)(x + 3)$

b.  $(6 - 3x)(x + 2) - (2 - x)^2$

2. Résoudre les inéquations suivantes :

a.  $(3 - 2x)(3x + 1) > 0$

b.  $(3x + 1)(x + 1) < (x + 1)(4x + 2)$

**7. Développement et factorisation :**

**Exercice 4416**



Factoriser, si possible, les polynômes du second degré ci-

dessous :

- a.  $3x^2 + 4x + 1$       b.  $-3x^2 + 4x - 1$       c.  $-4x^2 + 5x$   
 d.  $-4x^2 + 12x - 9$       e.  $x^2 + 2x + 1$       f.  $3x^2 - 4x + 2$

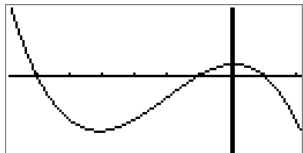
**8. Calculatrice et polynôme :**

**Exercice 4635**



On considère la fonction  $f$  dont l'image d'un nombre  $x$  réel est définie par la relation :

$f(x) = -2x^3 - 12x^2 + 2x + 12$



La représentation de cette fonction est donnée dans la capture d'écran ci-contre d'une calculatrice.

Parmi les expressions suivantes, une seule représente la forme factorisée de ce polynôme. Laquelle?

- a.  $2(x - 1)(x + 1)(x - 6)$       b.  $2(x - 1)(x + 1)(x + 6)$   
 c.  $2(1 - x)(x + 1)(x + 6)$       d.  $2(1 - x)(x + 1)(x - 6)$

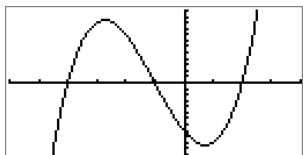
Vérifier votre réponse.

**Exercice 4634**



On considère la fonction  $f$  dont l'image d'un nombre  $x$  réel est définie par la relation :

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$



La représentation de cette fonction est donnée dans la capture d'écran ci-contre d'une calculatrice.

Parmi les expressions suivantes, une seule représente la forme factorisée de ce polynôme. Laquelle?

- a.  $(x + 2)(x - 1)(x - 4)$       b.  $(x - 2)(x + 1)(x + 4)$   
 c.  $(x - 1)(x - 2)(x + 4)$       d.  $(x + 4)(x - 1)(x + 2)$

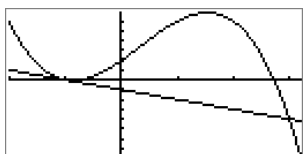
Vérifier votre réponse.

**Exercice 4636**



1. On considère les deux fonction

$f(x) = -x^3 + x^2 + 4x + 2$   
 $g(x) = -x - 1$



Les représentation de ces deux fonctions sont données dans la capture d'écran ci-contre d'une calculatrice.

- a. Utiliser votre calculatrice pour décrire l'ensemble des solutions de l'équation :  
 $f(x) = g(x)$
- b. Pour chacune des deux égalités ci-dessous, déterminer les valeurs des réels  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  réalisant ces égalités :
- $-x^3 + x^2 + 5x + 3 = (x + 1)(\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma)$
  - $-x^3 + x^2 + 5x + 3 = (x - 3)(\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma)$
- c. A l'aide de la question précédente, affirmer la conjecture de la question a.

2. On considère les deux fonctions  $f$  et  $g$  définies par :

$f(x) = 2x^3 - 5x + 6$  ;  $g(x) = x + 2$

Suivre la démarche de la question précédente pour déterminer l'ensemble des solutions de l'équation :

$f(x) = g(x)$

**Exercice 4633**



1. A l'aide de la calculatrice, conjecturer la forme factorisée des polynômes suivants :

- a.  $x^3 + 3x^2 - 6x - 8$       b.  $x^3 - 3x^2 - x + 3$   
 c.  $-x^3 - x^2 + 4x + 4$       d.  $3x^2 - 6x^2 - 3x + 6$   
 e.  $4x^3 + 8x^2 - 4x - 8$       f.  $-2x^3 + 4x^2 + 6x$

2. Vérifier algébriquement vos conjectures de la question précédente.

**Exercice 4639**



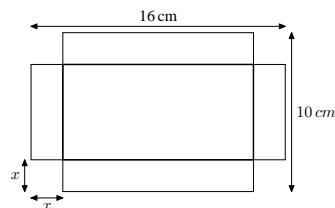
Résoudre les inéquations suivantes :

- a.  $x^3 - 4x^2 + x + 6 < 0$       b.  $2x^3 + 4x^2 - 6x \geq 0$   
 c.  $-2x^3 - 4x^2 + 2x + 4 > 0$       d.  $2x^3 + 2x^2 - 2x - 2 \leq 0$

**Exercice 4638**



On veut réaliser, dans le patron ci-dessous une boîte rectangulaire sans couvercle. Les longueurs sont exprimées en *cm*.



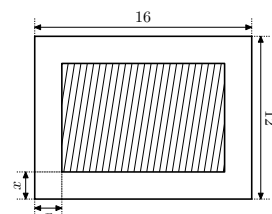
Déduire la ou les valeurs de  $x$  pour lesquelles cette boîte possède une aire de  $144 \text{ cm}^2$ .

**Exercice 4637**



Sur un ancien terrain vague de forme rectangulaire de longueur  $16 \text{ m}$  et  $12 \text{ m}$ , la municipalité souhaite construire un jardin d'enfants avec une allée faisant le tour l'aire de jeu :

L'aire de jeu est représentée ci-dessous par la partie hachurée :



Quel(s) dimension(s) peut avoir la largeur de l'allée afin que l'aire de jeu soit la même que celle de l'allée.

## 9. Racines carrées :

### Exercice 296



1. Soit  $a$  et  $b$  deux nombres tels que  $a \geq 0$  et  $b \geq 0$ . Comparer les nombres :

$$\sqrt{a+b} \quad ; \quad \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

2. Quelles conditions sur  $a$  et  $b$  doit-on avoir pour que l'inégalité soit stricte?

## 255. Exercices non-classés :

### Exercice 7332



On considère les deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}_+$  par les relations :

$$f(x) = 2 \cdot (x-1) \cdot \sqrt{x} \quad ; \quad g(x) = 3 \cdot x^2 - 9 \cdot x + 6$$

A l'aide de la calculatrice, conjecturer la position relative sur  $\mathbb{R}_+$  des courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  représentatives respectivement des fonctions  $f$  et  $g$ .

On utilisera les résultats de la calculatrice arrondie au centième près.

### Exercice 2042



Résoudre les systèmes suivants :

a. 
$$\begin{cases} x \times y = 3 \\ (x+1)(y+1) = 4 \end{cases}$$

b. 
$$\begin{cases} x \times y = 3 \\ (x+5)(y+5) = 8 \end{cases}$$

c. 
$$\begin{cases} x \times y = 4 \\ (x+6)(y+3) = 4 \end{cases}$$

d. 
$$\begin{cases} x \times y = 6 \\ (x+3)(y+1) = 6 \end{cases}$$

e. 
$$\begin{cases} x \times y = 7 \\ (x+2)(y+2) = -5 \end{cases}$$

### Exercice 2043



Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x \times y = 4 \\ (x+6)(y-3) = -8 \end{cases}$$

### Exercice 2045



Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x \times y = 2 \\ (x-1)(y-9) = 2 \end{cases}$$

### Exercice 2046



Résoudre l'équation suivante :

$$\begin{cases} x \times y = 2 \\ (x+4)(y-1) = -2 \end{cases}$$