Première Spécialité/Second degré: équations

Davantage d'exercices sur le 2nd degré en suivant le lien :
https://chingatome.fr/chapitre/hp-lycee/fonctions-second-degre

ChingEval : 13 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

1. Manipulation de polynomes du second degré :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 432

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par : $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$

1. a. Etablir l'égalité : $f(x) = 2 \cdot (x-3)(x-1)$
   b. Résoudre l'équation : $f(x) = 0$.
   c. Résoudre l'inéquation : $f(x) \leqslant 0$.
2. a. Etablir l'égalité : $f(x) + 2 = 2(x-2)^2$
   b. En déduire que, pour tout nombre x réel, on a : $f(x) \geqslant -2$

Exercice 439

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par : $f(x) = -4x^2 + 36x + 63$

1. a. Etablir l'égalité : $f(x) = (21 - 2 \cdot x)(2 \cdot x + 3)$
   b. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation : $f(x) = 0$.
   c. Résoudre l'inéquation : $f(x) > 0$
2. a. Etablir l'égalité : $f(x) - 144 = -4 \cdot \left(x - \dfrac{9}{2}\right)^2$.
   b. En déduire que, pour tout nombre x réel, on a : $f(x) \leqslant 144$

2. Forme canonique :

(+4 exercices pour les enseignants)

Exercice 4458

Proposition-Définition : tout polynôme du second degré $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ admet une expression de la forme :
$f : x \mapsto \alpha \cdot (x - \beta)^2 + \gamma$
où α, β, γ sont des nombres réels avec $\alpha \neq 0$.
Cette expression s'appelle la **forme canonique**.

Associer à chacun des polynômes du second degré sa forme canonique :

$4x^2 + 8x + 7$ ∘	∘ $(x+2)^2 - 5$
$x^2 + 4x - 1$ ∘	∘ $(x-4)^2 - 4$
$x^2 - 8x + 20$ ∘	∘ $4(x+1)^2 + 3$
$4x^2 - 16x + 6$ ∘	∘ $4(x-2)^2 - 10$
$-4x^2 - 16x - 12$ ∘	∘ $(x-4)^2 + 4$
$x^2 - 8x + 12$ ∘	∘ $-4(x-2)^2 + 4$
$-4x^2 + 16x - 12$ ∘	∘ $-4(x+2)^2 + 4$

Exercice 9397

Déterminer la forme canonique de chacune des expressions ci-dessous :

a. $x^2 - 4x + 1$ b. $x^2 + 6x + 3$

Exercice 9398

Déterminer la forme canonique de chacun des polynômes du second degré suivants :

a. $x^2 + 4x - 5$ b. $x^2 - 2x - 1$

Exercice 9405

Déterminer la forme canonique de chacun des polynômes du second degré suivants :

a. $x^2 + 2x - 3$ b. $x^2 - 6x - 2$
c. $x^2 + 12x + 5$ d. $x^2 - 10x + 5$

Exercice 9404

Donner la forme canonique de chacun des trinômes du second degré ci-dessous :

a. $2x^2 + 12x - 4$ b. $3x^2 + 30x + 12$

Exercice 2259

Donner la forme canonique de chacun des trinômes du second degré ci-dessous :

a. $2x^2 + 8x - 6$ b. $3x^2 + 6x + 6$
c. $9x^2 + 18x + 27$ d. $5x^2 + 10x + 2$

Exercice 2248

Déterminer la forme canonique de chacune des expressions ci-dessous :

a. x^2+x+2 b. x^2-3x-1

c. $x^2+\frac{1}{2}x-3$ d. $x^2+x-\frac{1}{3}$

Exercice 9396

Déterminer la forme canonique de chacun des polynômes du second degré suivants :

a. $x^2+\frac{1}{4}x+1$ b. x^2+x+1

3. Forme canonique et équations :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 7227

Rappel : pour résoudre une équation se présentant sous la forme de l'égalité de deux carrés, on utilise la troisième identité remarquable pour se ramener à une équation-produit :

Résolvons l'équation $(x+1)^2=9$:

$$(x+1)^2=9$$
$$(x+1)^2=3^2$$
$$(x+1)^2-3^2=0$$

D'après l'identité remarquable :

$$\big[(x+1)+3\big]\big[(x+1)-3\big]=0$$
$$(x+4)(x-2)=0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$x+4=0$ | $x-2=0$

$x=-4$ | $x=2$

Cette équation a pour solution : -4 et 2.

On considère le polynôme (P) : x^2+6x-7

1. Déterminer la forme canonique du polynôme P.
2. A l'aide de la forme canonique du polynôme, déterminer les deux solutions de l'équation : $x^2+6x-7=0$

Exercice 9763

On considère le polynôme $P=3{\cdot}x^2-12{\cdot}x+17$.

1. Parmi les expressions ci-dessous, laquelle est la forme canonique du polynôme P :
   - $3{\cdot}(x-2)^2+5$
   - $3{\cdot}(x+1)^2+7$
   - $3{\cdot}(x-3)^2-17$
2. En utilisant la forme canonique du polynôme P, résoudre l'équation : $3{\cdot}x^2-12{\cdot}x+17=8$

Exercice 7220

On considère le polynôme (P) : $x^2+4{\cdot}x+9$.

1. Déterminer les valeurs des nombres a et b réalisant l'identité : $x^2+4{\cdot}x+9=(x+a)^2+b$
2. En déduire que l'équation $x^2+4{\cdot}x+9=1$ n'admet aucune solution.

Exercice 9442

On considère l'équation : (E) : $2x^2+4x+4=20$.

1. Déterminer la forme canonique du polynôme : $2x^2+4x-16$.
2. En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 2246

1. Factoriser chacune des expressions suivantes en produit de facteurs du premier degré :

   a. $4x^2-81$ b. x^2-5

   c. $(2x-4)^2-9$ d. $x^2-6{\cdot}x+9$
2. Trouver un argument permettant de justifier que l'expression x^2+1 ne peut se factoriser sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.
   on aura alors établit l'assertion suivante :

   Il n'existe pas de nombre réels α, β, γ, δ tel que : $x^2+1=(\alpha{\cdot}x+\beta)(\gamma{\cdot}x+\delta)$

Exercice 9533

Soit la fonction f dont l'image de x est définie par : $f(x)=x^2-2x-2$

1. Déterminer les valeurs des deux réels α et β vérifiant l'égalité suivante :
   $$f(x)=(x-\alpha)^2+\beta$$
2. Déterminer la forme factorisée de la fonction f.
3. Déduire de la question précédente, les antécédents de 0 par la fonction f.

4. Calcul du discriminant :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 4459

Définition : le **discriminant** d'un polynôme $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ du second degré est un nombre qui se calcule à l'aide des coefficients du polynôme : $\Delta=b^2-4\times a\times c$

Compléter le tableau ci-dessous pour chacun des polynômes du second degré :

	a	b	c	$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c$
$2x^2+5x+1$				
$-x^2+7x+3$				
x^2-5x+4				
$2x^2-4x-1$				
$-x^2-x-1$				
x^2+7				

Exercice 10201

Déterminer le discriminant de chacun des polynômes du second degré ci-dessous :

a. $3\cdot x^2+5\cdot x+2$ b. $-x^2-3\cdot x+2$ c. $2\cdot x^2-\dfrac{1}{3}\cdot x+1$

5. *Equation du second degré :*

(+4 exercices pour les enseignants)

Exercice 2253

Définition : les racines d'un polynôme sont les valeurs annulant ce polynôme.

Proposition : pour un polynôme $a\cdot x^2+b\cdot x+c$ du second degré, le nombre de racines existantes dépend du discriminant :

$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
Aucune racine	1 racine $-\dfrac{b}{2\cdot a}$	2 racine $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$; $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$

Déterminer les racines des polynômes ci-dessous :

a. x^2+4x-5 b. x^2+x+1

c. $2x^2-13x+15$ d. $3x^2-6x+3$

Exercice 7082

Déterminer les racines des polynômes ci-dessous :

a. $2x^2-3x-2$ b. $-4x^2+12x-9$ c. $3x^2-4x+2$

Exercice 770

Déterminer les racines des polynômes ci-dessous :

a. $3x^2-5x+6$ b. $3x^2-24x+48$ c. $-2\cdot x^2+x+6$

Exercice 2260

Déterminer les racines des polynômes suivants :

a. $x^2+2x-15$ b. $3x^2-5x+7$

c. $3x^2-24x+48$ d. $-4\cdot x^2-x+3$

Exercice 9534

Déterminer les racines des polynômes du second degré suivants :

a. $-2\cdot x^2-5\cdot x-3$ b. $2\cdot x^2+5\cdot x+2$

c. x^2+x-2 d. $3\cdot x^2+4\cdot x+2$

Exercice 9464

Déterminer les racines des polynômes ci-dessous :

a. $\dfrac{2}{3}\cdot x^2+x-3$ b. $-2\cdot x^2-\dfrac{11}{3}\cdot x-1$ c. $3\cdot x^2-3\cdot x+\dfrac{2}{3}$

Exercice 9400

Résoudre les équations suivantes :

a. $\dfrac{2}{7}\cdot x^2-\dfrac{5}{3}\cdot x-\dfrac{7}{3}=0$ b. $-\dfrac{1}{2}\cdot x^2-\dfrac{4}{5}\cdot x+\dfrac{2}{5}=0$

Exercice 7047

Parmi les quatre propositions ci-dessous, laquelle est correcte?

L'équation $-\dfrac{x^3}{3}+x^2+3\cdot x=0$ admet sur $\mathbb{R}$:

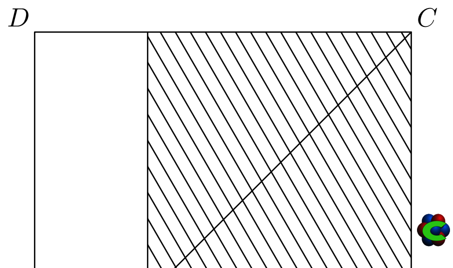
a. la solution est -2 b. trois solutions distinctes

c. aucune solution d. une unique solution

6. *Problèmes :*

(+4 exercices pour les enseignants)

Exercice 2955

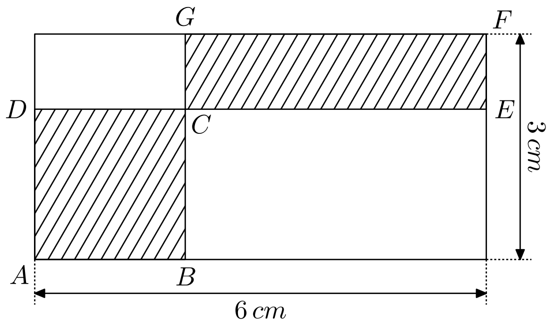


On considère un carré $ABCD$ de 10 centimètres de côté ; un point I appartient à la diagonale $[AC]$, il est repéré comme l'indique la figure ci-dessous par la

Déterminer la valeur de x pour laquelle la somme des aires de ces deux carrés vaut les $5/8$ de l'aire du carré $ABCD$.

Exercice 10202

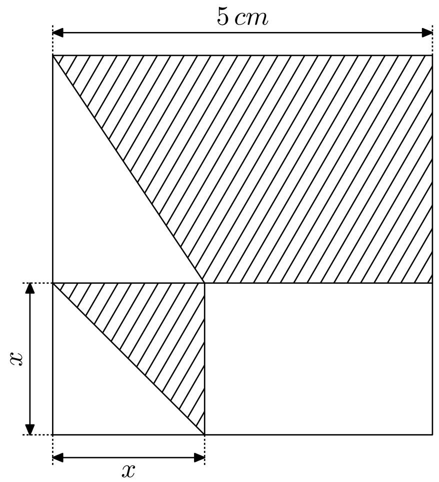
On considère le rectangle ci-dessous ayant pour dimension $6\,cm$ et $3\,cm$. A l'intérieur de ce rectangle, on construit le carré $ABCD$ et le rectangle $CEFG$ dont les côtés sont parallèles au rectangle les contenant.



On note x la longueur du segment $[AB]$. Déterminer s'il est possible que la partie hachurée de cette figure est une aire de $8\,cm^2$.

Exercice 10190

On considère le carré ci-dessous de côté $5\,cm$ et hachuré un triangle rectangle isocèle et un trapèze rectangle :



Déterminer la valeur de x pour que la surface de la partie hachurée mesure $16\,cm^2$.

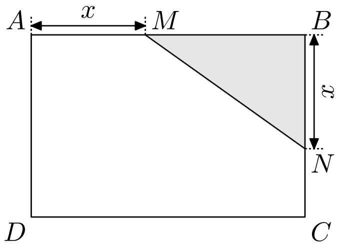
Exercice 5972

Dans cet exercice, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On considère un rectangle $ABCD$ dont les dimensions sont données ci-dessous :

$AB = 6\,m$; $AD = 4\,m$.

Pour un nombre réel x compris entre 0 et 4, on place les points M et N respectivement sur les côtés $[AB]$ et $[BC]$ tels que : $AM = x$; $BN = x$



Déterminer la ou les valeurs possibles de x pour que l'aire du triangle MBN soit égales à $\dfrac{1}{6}$ de l'aire totale du rectangle $ABCD$.

Exercice 6786

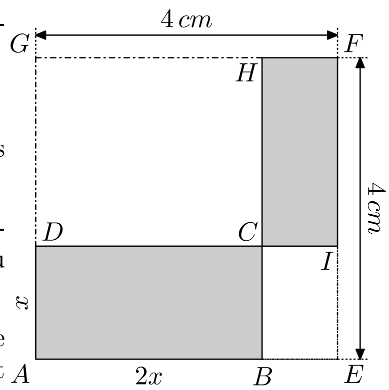
1. Vérifier que : $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$
2. Existe-t-il d'autres séries de 5 entiers naturels consécutifs tels que la somme des carrés des deux plus grands soit égale à la somme des carrés des plus petits?

Exercice 10328

On considère la figure ci-dessous composée :

- du carré $AEFG$,
- de deux rectangles $ABCD$ et $CIFH$.

Les points B, D, I, H appartiennent aux côtés du carré $AEFG$.



On considère le domaine grisé représenté ci-contre et on note son aire $\mathcal{A}$:

(les mesures sont exprimées en centimètre)

Déterminer l'ensemble des valeurs de x réalisant l'équation :

$$\mathcal{A} = \frac{37}{4}$$

Toute trace de recherche ou de prise d'initiative sera prise en compte dans l'évaluation.

7. Problèmes avec substitution :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 8384

1. Résoudre l'équation : $x^2-\dfrac{37}{2}\cdot x+85=0$
2. On considère un rectangle ayant $37\,m$ pour périmètre et $85\,m^2$ pour aire. On notera respectivement L et ℓ, la longueur et la largeur de ce rectangle.
   a. Exprimer ℓ en fonction de L.
   b. Déterminer les dimensions de ce rectangle.

Exercice 8196

Un rectangle a pour périmètre $19\,m$ et pour aire $12\,m^2$.

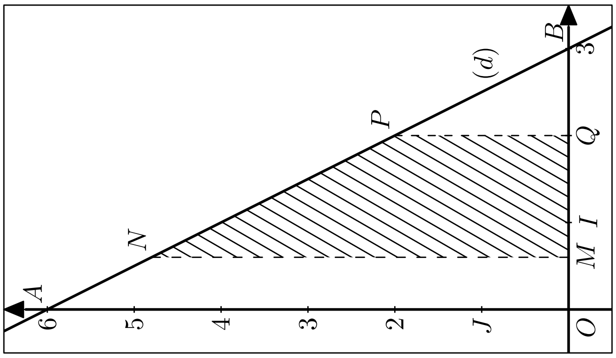
Déterminer les dimensions de ce rectangle.

8. Problèmes et courbes représentatives de fonctions :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 9444

Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$ orthonormé, on considère la droite (d) passant par les points $A(0;6)$ et $B(3;0)$



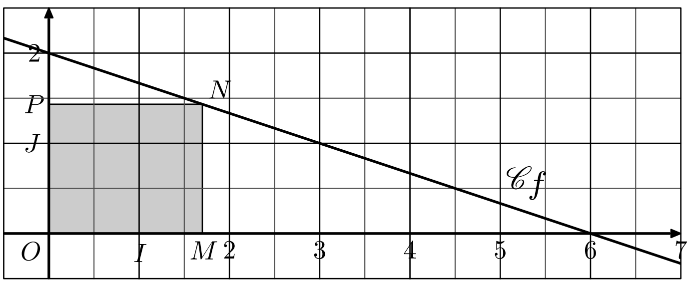
On considère les 4 points M, N, P, Q vérifiant les propriétés suivantes :

- on a les coordonnées : $Q(2;0)$; $M(x;0)$ où x appartient à l'intervalle $]0;2[$.
- les points N et P appartiennent à la droite (d).
- les points M et P ont la même abscisse et les points Q et P ont la même abscisse.

1. a. Déterminer l'expression de la fonction affine f admettant la droite (d) pour courbe représentative.
   b. En déduire les coordonnées du point P.
   c. En déduire l'expression des coordonnées du point N en fonction de x.
2. On note $\mathcal{A}$ l'aire du trapèze $MNPQ$:
   a. Donner l'expression de l'aire $\mathcal{A}$ en fonction de x.
   b. Déterminer la position du point M afin que l'aire $\mathcal{A}$ vale 3.

Exercice 10204

Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f affine admettant pour expression :
$f(x) = -\frac{1}{3}\cdot x + 2$

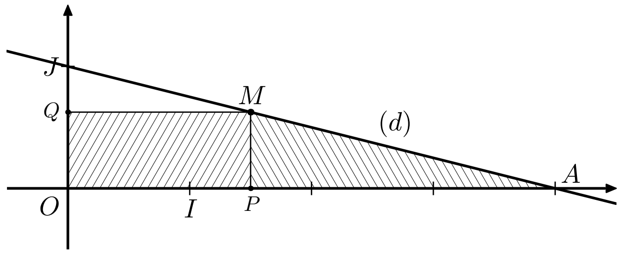


Soit x un nombre appartenant à l'intervalle $]0;6[$. On note N le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et on construit le rectangle $OMNP$ dont les côtés sont parallèles aux axes.

Déterminer le *(ou les)* coordonnées du point N tel que le rectangle $OMNP$ ait une aire de $\frac{5}{3}$

Exercice 6691

Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$, on considère la droite (d) passant par les points $A(4;0)$ et J.



On considère un point M appartenant à la droite (d) et d'abscisse x tel que $x\in]0;4[$.

Déterminer la position du point M sur la droite (d) telle que le rectangle $OPMQ$ et le triangle MPA aient la même aire.

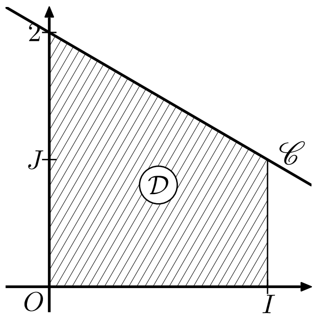
Toute trace de recherche et de prise d'initiatives seront prises en compte au cours de l'évaluation.

Exercice 6754

On considère la fonction f définie par :
$f(x) = 2 - x$ pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$.

On admet que :
$f(x) > 0$, pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$.

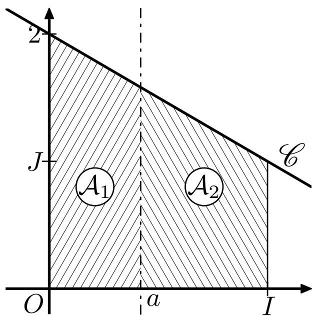
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé, et $\mathcal{D}$ le domaine plan compris d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$, d'autre part entre les droites d'équations $x=0$ et $x=1$. La courbe $\mathscr{C}$ et le domaine $\mathcal{D}$ sont représentés ci-contre.



Le but de cet exercice est de partager le domaine $\mathcal{D}$ en deux domaines de même aire, d'abord par une droite parallèle à l'axe des ordonnées *(partie* **A***)*, puis par une droite parallèle à l'axe des abscisses *(partie* **B***)*.

Partie A

Soit a un réel tel que $0\leqslant a\leqslant 1$.
On note $\mathcal{A}_1$ l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox), les droites d'équations $x=0$ et $x=a$, puis $\mathcal{A}_2$ celle du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, (Ox) et les droites d'équation $x=a$ et $x=1$.
$\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont exprimées en unités d'aire.



Déterminer la valeur de a afin que les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ soient égales.

Partie B

Soit b un réel positif.
Dans cette partie, on se propose de partager le domaine $\mathcal{D}$ en deux domaines de même aire par la droite d'équation $y=b$.
On admet qu'il existe un unique réel b positif solution.

Déterminer la valeur de b.

9. Racine et radicaux :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 9402

Exprimer les deux racines du polynômes x^2-3x+1 sous la forme $\dfrac{a+\sqrt{5}}{b}$ où a et b sont deux nombres réels.

Exercice 9462

On considère le polynôme P définie par : $P=-4{\cdot}x^2+4{\cdot}x+1$

Déterminer les deux racines de ce polynôme sous la forme $\dfrac{a+\sqrt{2}}{b}$ où a et b sont des nombres réels.

Exercice 8288

Déterminer les racines des polynômes ci-dessous :

a. $2x^2+3x+3$ b. x^2-2x-6 c. x^2+2x-1

Indication : on exprimera ces racines, si elles existent, sous la forme : $a+b{\cdot}\sqrt{c}$ où $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}_+^*$

Exercice 9401

Déterminer les racines des polynômes du second degré suivants :

a. $-2{\cdot}x^2-x+1$ b. $2{\cdot}x^2-x+3$ c. $2{\cdot}x^2-4x+1$

Indication : on exprimera les racines sous la forme la plus simplifiée possible.

10. Somme et produit des racines :

Exercice 2297

1. **Etude théorique :**

On admet que pour un trinôme ax^2+bx+c du second degré dont le discriminant Δ est strictement positif, ces deux racines s'expriment sous la forme :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

a. Montrer que la somme des racines vaut $-\dfrac{b}{a}$.

b. Montrer que le produit des racines vaut $\dfrac{c}{a}$

2. **Application :**

En utilisant les propriétés établies à la question précédentes, répondre aux questions suivantes :

a. On considère le polynôme $2x^2+4x-16$. Après avoir vérifié que 2 est une racine de ce polynôme, déterminer la valeur de l'autre racine.

b. Déterminer un trinôme du second degré admettant deux racines dont la somme des racines vaut 3 et le produit des racines vaut -10.

11. D'autres équations :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 2255

On considère la fonction polynome P de degré 3 définie par :
$P(x)=3x^3+x^2-8x+4$

1. Déterminer les valeurs de a, b, c tel que :
$P(x)=(x+2)\big(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c\big)$

2. En déduire l'ensemble des zéros du polynôme P.

12. Evolutions et problèmes :

Exercice 8195

Un objet coûte au départ 128 € puis subit une augmentation de $t\,\%$ pour finalement subir une réduction de $t\,\%$. Son nouveau prix est de 126 €.

Déterminer la valeur du nombre t associé à chacune de ces évolutions.

Exercice 8194

Néo a ouvert un compte en 2017 et place le 1er Janvier 2017, le 1er Janvier 2018, le 1er Janvier 2019 toujours la même somme qu'on notera x.
Son compte est rémunéré à un taux constant 4 % par an.

Sachant que son compte est crédité, au 1er Janvier 2019, de 468,24 €, déterminer la somme x déposée par Néo chaque année sur son compte.

14. Exercices non-classés :

Exercice 2245

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est définie par la relation algébrique :

$$f(x) = 4x^2 + 4x - 3$$

1. a. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $f(x) = (2x-1)(2x+3)$

   b. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $f(x) = (2x+1)^2 - 4$

2. Pour chacune des questions suivantes, utiliser la forme la plus adaptée :

   a. Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f.

   b. Sachant que le carré d'un nombre est toujours positif ou nul, établir que la fonction f est minorée par -4.

   c. Déterminer le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   d. Résoudre l'inéquation : $f(x) \geqslant 5$.

Exercice 7221

Résoudre l'équation ci-dessous en donnant les réponses arrondies au centième près : $3{\cdot}x^2+x-1=0$

Exercice 8213

On considère la fonction f définie par le polynôme du second degré : $f(x)=4x^2-12x+8$

1. Déterminer la forme canonique de l'expression de f.

2. Etablir qu'en $x=\dfrac{3}{2}$, la fonction f admet un minimum.
   On donnera les élèments caractéristiques de cet extremum.

   a. Vérifier que le nombre 1 est un zéro de la fonction f.

   b. En déduire la forme factorisée de la fonction f.

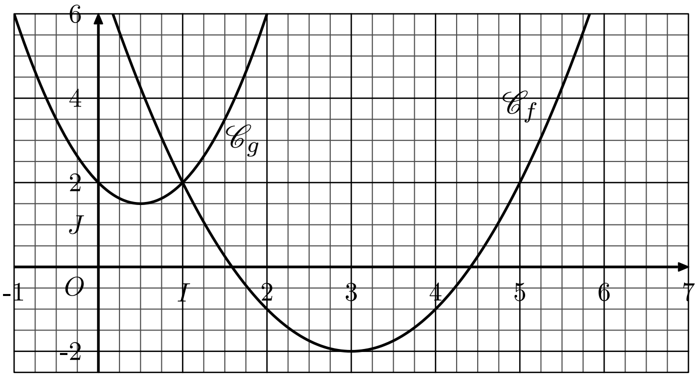
   c. Dresser le tableau de signes de la fonction f.

Exercice 9525

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 6{\cdot}x + 7 \quad ; \quad g(x) = 2{\cdot}x^2 - 2{\cdot}x + 2$$

Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;I\,;J)$, on donne les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives respectivement des fonctions f et g.



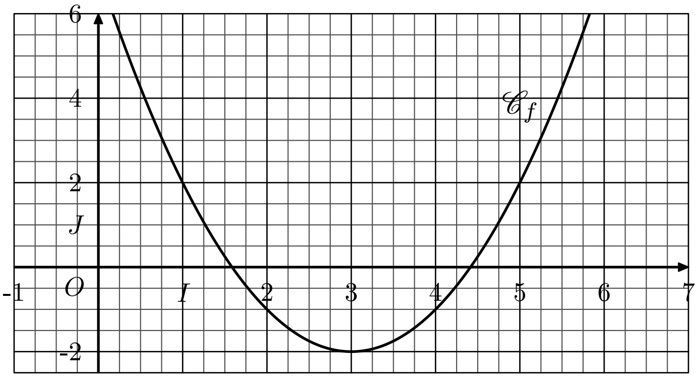
1. Déterminer les zéros de la fonction f.

2. Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 9526

Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;I\,;J)$, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 6{\cdot}x + 7$

Voici la représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$:



Déterminer les zéros de la fonction f.

Exercice 10203

Soit m un nombre réel $(m \in \mathbb{R})$. Pour tout nombre m, on considère la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_m(x) = 4{\cdot}x^2 + (5-m)x + m$$

Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles la courbe de la fonction f_m intercepte deux fois l'axe des abscisses.