Première Spécialité/Probabilités conditionnelles

1. Rappels de probabilités :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 4791

Voici le tableau représentant la loi de probabilité d'un dés truqué à six faces :

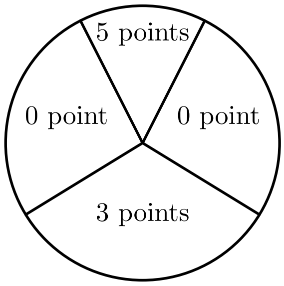
x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,15	0,1	0,08	0,17	0,22	0,28

Déterminer la probabilité de chacun des évènements ci-dessous :

1. A : "*Le nombre obtenu est supérieur ou égal à 4*".
2. B : "*Le nombre obtenu est pair*".

Exercice 4147

Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs, comme indiqué sur figure ci-dessous :



On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.
Le joueur lance une flèchette. On note :

- p_0 la probabilité d'obtenir 0 point ;
- p_3 la probabilité d'obtenir 3 points ;
- p_5 la probabilité d'obtenir 5 points.

Sachant que $p_5 = \dfrac{1}{2} \cdot p_3$ et que $p_5 = \dfrac{1}{3} \cdot p_0$, déterminer les valeurs de p_0, p_3 et p_5.

2. Introduction aux probabilités conditionnelles :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 4191

On a posé à 1 000 personnes la question suivante : "*Combien de fois êtes-vous arrivé en retard au travail au cours des deux derniers mois?*". Les réponses ont été regroupées dans le tableau suivant :

Retards le 1$^{\text{er}}$ mois / Retards le 2$^{\text{e}}$ mois	0	1	2 ou plus	Total
0	262	212	73	547
1	250	73	23	346
2 ou plus	60	33	14	107
Total	572	318	110	1000

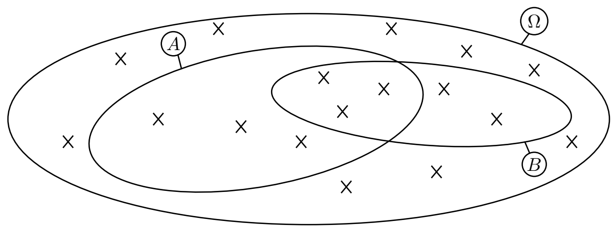
On choisit au hasard un individu de cette population.
On arrondira les probabilités au millième près.

1. Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le premier mois.
2. a. Parmi les individus n'ayant pas eu de retard le premier mois, quelle est la probabilité de choisir au hasard un individu qui ait eu au moins un retard le second mois?

   b. Parmi les individus ayant eu au moins un retard le second mois, quelle est la probabilité de choisir un individu n'ayant pas eu de retard le premier mois?

Exercice 5193

On considère un ensemble Ω et deux de ses parties A et B représentés ci-dessous et dont les éléments sont représentés par des croix :



De manière équiprobable, on choisit un élément au hasard.

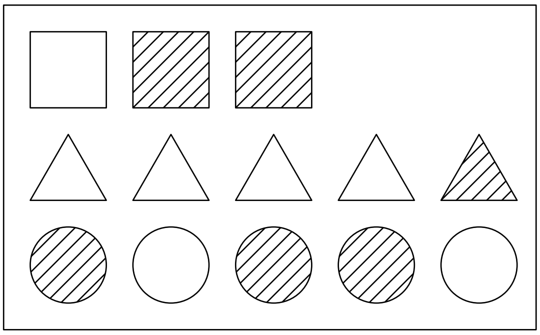
1. a. Quelle est la probabilité que l'élément tiré appartienne à A?

   b. Sachant qu'on a tiré un élément de B, quelle est la probabilité que cet élément appartienne également à A?
2. a. Déterminer les probailité suivantes :
   $\mathcal{P}(B)$; $\mathcal{P}(A \cap B)$

   b. Donner la valeur du quotient : $\dfrac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)}$.
   Que remarque-t-on?

Exercice 3728

Un jeu consiste à secouer et renverser une bouteille afin d'en sortir un de ses éléments. Voici le contenu de cette bouteille :



1. Déterminer la probabilité des évènements suivants :

   a. A : *"L'élément sorti est un carré"* ;

   b. B : *"L'élément sorti est rayé"* ;

   c. $A \cap B$: *"L'élément sorti est un carré rayé"*.

2. a. Déterminer la valeur du quotient : $\dfrac{\mathcal{P}(A\cap B)}{\mathcal{P}(A)}$

   b. La valeur $\dfrac{2}{3}$ représente quelle probabilité?

   - *"la probabilité d'avoir un élèment rayé parmi les élèments carrés?"*
   - ou *"la probabilité d'avoir un carré parmi les élèments rayés"*.

3. a. Déterminer la valeur du quotient : $\dfrac{\mathcal{P}(A\cap B)}{\mathcal{P}(B)}$

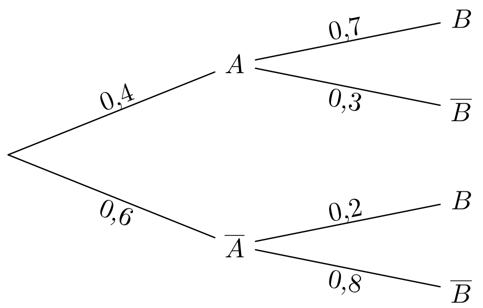
   b. Compléter la phrase ci-dessous :
   "La probabilité des élèments ...... parmi les éléments ...... a une probabilité de $\dfrac{1}{3}$ *"*

3. Probabilités conditionnelles :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 8291

On considère l'arbre de probabilité suivant :



1. Par lecture de cet arbre, donner les probabilités ci-dessous :

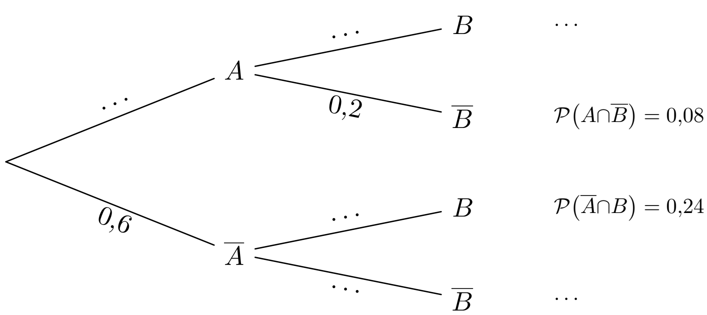
   a. $\mathcal{P}_A(B)$ b. $\mathcal{P}_{\overline{A}}(B)$

2. Déterminer les probabilités ci-dessous :

   a. $\mathcal{P}(A\cap B)$ b. $\mathcal{P}(\overline{A}\cap B)$

Exercice 4405

On considère l'arbre de probabilité incomplet suivant :



Déterminer les probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}(A)$ b. $\mathcal{P}_A(B)$ c. $\mathcal{P}(A\cap B)$

d. $\mathcal{P}_{\overline{A}}(B)$ e. $\mathcal{P}_{\overline{A}}(\overline{B})$ f. $\mathcal{P}(\overline{A}\cap\overline{B})$

Exercice 2093

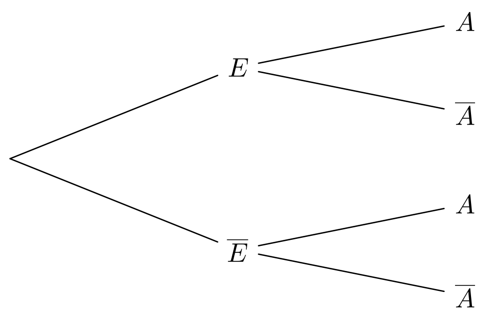
Dans ce QCM, il s'agit de recopier sur la copie chacune des trois affirmations proposées en la complétant par la réponse choisie.
Un seul choix est correct. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse juste vaut un point, une réponse fausse enlève un quart de point, l'absence de réponse est notée 0. Si le total des points obtenus sur cet exercice est négatif ou nul, la note zéro est attribuée à l'exercice.

L'arbre suivant représente les données d'un exercice de probabilité. La probabilité d'un évènement H est notée $\mathcal{P}(H)$.

On sait que :

$$\mathcal{P}(E) = 0{,}3 \quad ; \quad \mathcal{P}_E(A) = 0{,}1 \quad ; \quad \mathcal{P}(\overline{E}\cap A) = 0{,}14$$



1. La probabilité de $E\cap A$ est égale à :

   a. 0,4 b. 0,03 c. 0,33 d. 0,1

2. La probabilité de A sachant $\overline{E}$ est égale à :

   a. 0,7 b. 0,14 c. 0,2 d. 1,1

4. Probabilités conditionnelles et probabilité de l'union :

Exercice 4809

Le comité d'entreprise d'une société parisienne souhaite organiser un week-end en province.

Une enquête est faite auprès des 1 200 employés de cette entreprise afin de connaître leur choix en matière de moyen de transport *(les seuls moyens de transport proposés sont le train, l'avion ou l'autocar)*

Les résultats de l'enquête auprès des employés de l'entreprise sont répertoriés dans le tableau suivant :

	Train	Avion	Autocar	Total
Femme	468	196	56	720
Homme	150	266	64	480
Total	618	462	120	1200

On interroge au hasard un employé de cette entreprise *(on suppose que tous les employés ont la même chance d'être interrogés).*

F l'évènement : "*l'employé est une femme*" ;

T l'évènement : "*l'employé choisit le train*".

1. Calculer les probabilités $\mathcal{P}(F)$, $\mathcal{P}(T)$ puis déterminer la probabilité que l'employé ne choisisse pas le train *(on donnera les résultats sous forme décimale)*

2. a. Déterminer la probabilité de l'évènement $F\cap T$.

   b. En déduire la probabilité de l'évènement $F\cup T$.

3. En choisissant un employé au hasard parmi les employés n'ayant pas choisi le train, quelle est la probabilité que cet employé soit une femme? *(on donnera le résultat arrondi au millième)*

Exercice 3727

La scène se passe en haut d'une falaise au bord de la mer. Pour trouver une plage et aller se baigner, les touristes ne peuvent choisir qu'entre deux plages, l'une à l'Est et l'autre à l'Ouest.

Un touriste se retrouve deux jours consécutifs en haut de la falaise. Le premier jour, il choisit au hasard l'une des deux directions. Le second jour, on admet que la probabilité qu'il choisisse une direction opposée à celle prise la veille vaut 0,8.

Pour $t=1$ ou $t=2$, on note E_t l'évènement : "*Le touriste se dirige vers l'Est le t-ème jour*" et O_t l'évènement : "*Le touriste se dirige vers l'Ouest le t-ème jour*".

1. Dresser un arbre de probabilités décrivant la situation.

2. Déterminer les probabilités suivantes :
   $\mathcal{P}(E_1)$; $\mathcal{P}_{E_1}(O_2)$; $\mathcal{P}(E_1\cap E_2)$.

3. Calculer la probabilité que ce touriste se rende sur la même plage deux jours consécutifs.

5. Formule des probabilités totales : *(+2 exercices pour les enseignants)*

Exercice 2339

Dans un espace probabilisé, on considère les deux évènements A et B vérifiant les conditions suivantes :

$$\mathcal{P}(A)=0{,}64 \quad ; \quad \mathcal{P}_A(B)=0{,}3 \quad ; \quad \mathcal{P}_{\overline{A}}(B)=0{,}5$$

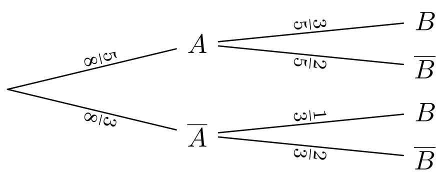
1. Construire un arbre de probabilité représentant cette situation.

2. a. Déterminer les probabilités des évènements suivants : $\mathcal{P}(A\cap B)$; $\mathcal{P}(\overline{A}\cap B)$

   b. A l'aide de la formule des probabilités totale, déterminer la probabilité de l'évènement B.

Exercice 8558

On considère une expérience aléatoire et deux de ses évènements A et B permettant d'obtenir l'arbre de probabilités ci-dessous :



Etablir que : $\mathcal{P}(B)=\dfrac{1}{2}$

Exercice 4160

A et B sont deux évènements liés à une même épreuve qui vérifient :

$$\mathcal{P}(A)=0{,}4 \quad ; \quad \mathcal{P}_A(B)=0{,}7 \quad ; \quad \mathcal{P}_{\overline{A}}(\overline{B})=0{,}1$$

Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

Affirmation : La probabilité de l'évènement A, sachant que l'évènement B est réalisé, est de $\dfrac{14}{41}$

Exercice 137

Dans tout l'exercice, on donnera les résultats arrondis à 10^{-4}

Les résultats d'une enquête concernant les véhicules circulant en France montrent que :

- 88 % des véhicules contrôlés ont des freins en bon état ;
- parmi les véhicules contrôlés ayant des freins en bon état, 92 % ont un éclairage en bon état ;
- parmi les véhicules contrôlés ayant des freins défectueux, 80 % ont un éclairage en bon état.

On choisit au hasard un des véhicules concernés par l'enquête. Il y a équiprobabilité des choix.
On note F l'événement "*le véhicule contrôlé a des freins en bon état*".
On note E l'événement "*le véhicule contrôlé a un éclairage en bon état*".

$\overline{E}$ et $\overline{F}$ désignent les événements contraires de E et F.

1. Décrire cette situation à l'aide d'un arbre.

2. a. Déterminer la probabilité $\mathcal{P}(\overline{F})$ de l'événement $\overline{F}$.

b. Quelle est la probabilité $\mathcal{P}_{\overline{F}}(\overline{E})$, probabilité que l'éclairage ne soit pas en bon état, sachant que les freins ne sont pas en bon état.

c. Montrer que la probabilité $\mathcal{P}(E\cap F)$ de l'événement $E\cap F$ est égale à 0,8096.

d. Quelle est la probabilité pour que le véhicule ait un éclairage en bon état?

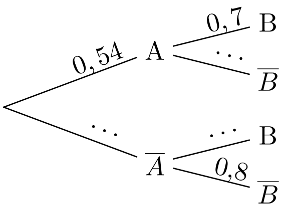
e. Tout conducteur d'un véhicule concerné par l'enquête ayant des freins ou un éclairage défectueux, doit faire réparer son véhicule. Calculer la probabilité pour qu'un conducteur ait des réparations à effectuer sur ses freins ou son éclairage.

6. Inversion de la condition :

(+4 exercices pour les enseignants)

Exercice 3601

Dans un espace probabilisé, on considère deux évènements A et B. Voici un arbre de probabilité réalisé avec ces deux évènements :



1. Compléter l'arbre de probabilité représentant cette expérience aléatoire.

2. Justifier chacune des valeurs suivantes *(arrondies au millième près)* :

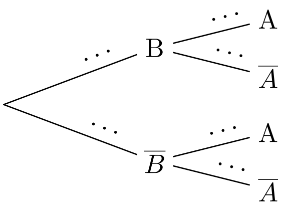
   a. $\mathcal{P}(A\cap B)=0{,}378$ b. $\mathcal{P}(\overline{A}\cap B)=0{,}092$

   c. $\mathcal{P}(B)=0{,}47$ d. $\mathcal{P}_B(A)\approx 0{,}804$

3. Déterminer les probabilités suivantes :

   a. $\mathcal{P}(A\cap\overline{B})$ d. $\mathcal{P}(\overline{B})$ f. $\mathcal{P}_{\overline{B}}(A)$

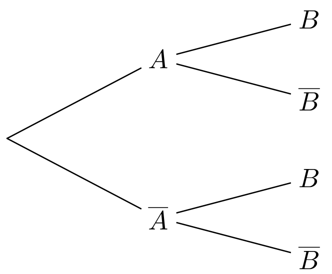
4. Construire l'arbre de probabilité ci-contre en le complétant avec les valeurs des probabilités arrondies au millième :

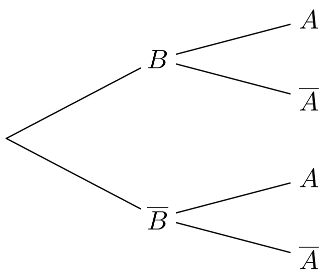


Exercice 5832

Dans un espace probabilisé, on considère deux évènements A et B. On connait les probabilités suivantes :

$$\mathcal{P}(A)=0{,}3 \quad ; \quad \mathcal{P}_A(B)=0{,}8 \quad ; \quad \mathcal{P}_{\overline{A}}(\overline{B})=0{,}6$$





Compléter, si nécessaire avec des valeurs arrondies au centième, les deux arbres de probabilité ci-dessus.

Exercice 3729

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.

La proportion de composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.

On note :

- D : l'évènement "*le composant est défectueux*" ;
- F_1 : l'évènement "*le composant provient du premier fournisseur*" ;
- F_2 : l'évènement "*le composant provient du second fournisseur*".

1. Dresser un arbre de probabilité correspondant à cette situation.

2. Calculer $P(D\cap F_1)$, puis démontrer : $P(D)=0{,}022\,5$

3. Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur? On arrondiera sa valeur au millième près.

Exercice 4170

Dans ma rue, il pleut un soir sur quatre.

S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\dfrac{1}{10}$; s'il ne pleut pas, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\dfrac{9}{10}$.

Sachant que j'ai sorti mon chien, quel est la probabilité qu'il pleuve?

Exercice 6760

Un maraîcher est spécialisé dans la production de fraises.

Le maraîcher produit ses fraises dans deux serres notées A et B : 55 % des fleurs de fraisier se trouvent dans la serre A, et 45 % dans la serre B. Dans la serre A, la probabilité pour chaque fleur de donner un fruit est égale à 0,88 ; dans la serre B, elle est égale à 0,84.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Proposition 1 :

La probabilité qu'une fleur de fraisier, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit est égale à 0,862.

Proposition 2 :

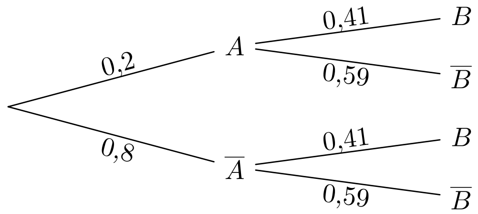
On constate qu'une fleur, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit. La probabilité qu'elle soit située dans la serre A, arrondie au millième est égale à 0,439.

7. Indépendance :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 8321

Dans une expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B permettant de construire l'arbre de probabilité :



1. Déterminer la probabilité de l'évènement B.
2. Etablir que les évènements A et B sont indépendants.

Exercice 4322

Soient A et B deux évènements indépendants d'un même univers Ω tels que :

$\mathcal{P}(A) = 0{,}3$; $\mathcal{P}(A \cup B) = 0{,}35$.

Déterminer la probabilité de l'évènement B.

Exercice 4169

On désigne par A et B deux évènements indépendants d'un univers muni d'une loi de probabilité $\mathcal{P}$.

On sait que : $\mathcal{P}(A\cup B) = \dfrac{4}{5}$; $\mathcal{P}(\overline{A}) = \dfrac{3}{5}$

Déterminer la probabilité de l'évènement B.

Exercice 4150

Soient A, B et C trois évènements d'un même univers Ω muni d'une probabilité $\mathcal{P}$. On sait que :

- A et B sont indépendants ;
- $\mathcal{P}(A) = \dfrac{2}{5}$; $\mathcal{P}(A\cup B) = \dfrac{3}{4}$
- $\mathcal{P}(C) = \dfrac{1}{2}$; $\mathcal{P}(A\cap C) = \dfrac{1}{10}$

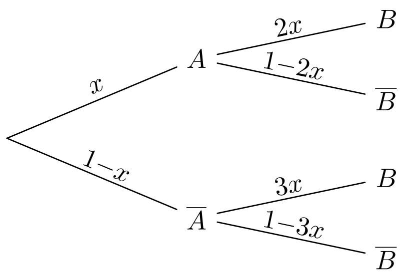
Sans justification, indiquer si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.

- **Proposition 1 :** $\mathcal{P}(B) = \dfrac{7}{12}$
- **Proposition 2 :** $\mathcal{P}\big(\overline{A\cup C}\big) = \dfrac{2}{5}$
  où $\overline{A\cup C}$ désigne l'évènement contraire de $A\cup C$.

8. Avec un peu d'algèbre :

Exercice 6741

Dans une expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B permettant de construire l'arbre de probabilité ci-dessous



et tels qu'il existe un nombre réel x vérifiant :

$\mathcal{P}(A) = x$; $\mathcal{P}_A(B) = 2x$; $\mathcal{P}_{\overline{A}}(B) = 3x$

1. Dans cette question, on suppose que $\mathcal{P}(B) = \dfrac{29}{100}$.
   Déterminer la valeur de x.
2. Dans cette question, on suppose que $\mathcal{P}_B(A) = \dfrac{1}{5}$.
   Déterminer la valeur de x.

9. Approfondissement : succession de plusieurs épreuves :

Exercice 7249

On considère une population chez laquelle on étudie trois critères : l'âge, le fait d'être propriétaire ou non de son logement, posséder ou non une voiture.

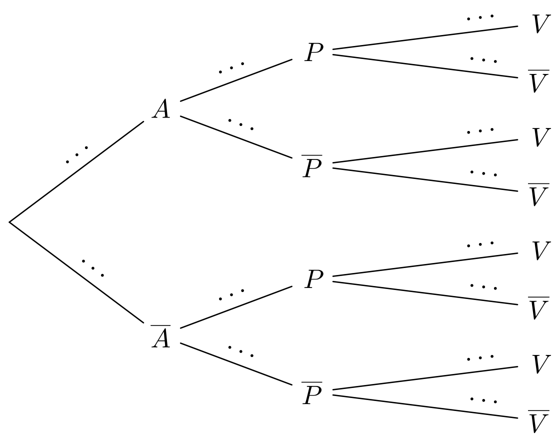
Pour organiser cette population, on considère les trois classes d'individu suivants :

- A : "*l'individu a 50 ans ou plus*"
- P : "*l'individu est propriétaire de son logement*".
- V : "*l'individu possède une voiture*".

Voici le tableau des effectifs obtenus à partir de l'étude :

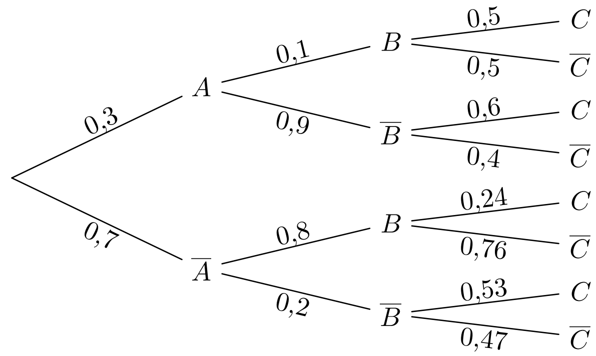
	A	$\overline{A}$	
P	49	1 332	V
	1	2 268	$\overline{V}$
$\overline{P}$	69	342	V
	506	11 058	$\overline{V}$

On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard un individu dans la population d'étude. En considèrant, les évènements associées aux classes de l'étude statistique, compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



Exercice 8322

On considère une expérience aléatoire et trois de ces évènements A, B et C permettant de construire l'arbre de probabilité suivant :

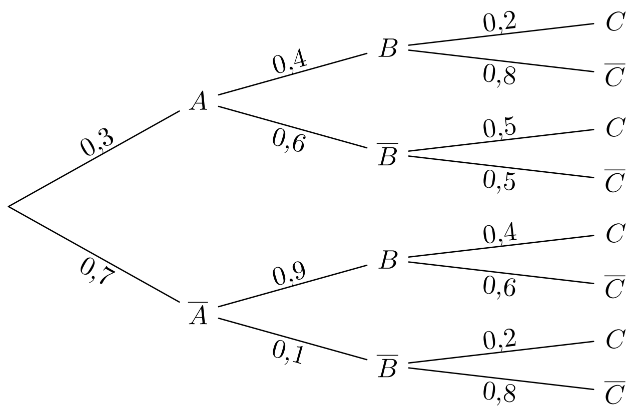


1. En relevant les valeurs sur l'arbre de probabilité, donner les probabilités :
   a. $\mathcal{P}_{\overline{A}}(B)$ b. $\mathcal{P}_{A\cap B}(C)$ c. $\mathcal{P}_{A\cap\overline{B}}(\overline{C})$
2. Déterminer les probabilités :
   a. $\mathcal{P}(A\cap B)$ b. $\mathcal{P}(A\cap B\cap C)$ c. $\mathcal{P}(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})$

10. Approfondissement : succession de plusieurs épreuves indépendantes :

Exercice 8325

On considère une expérience aléatoire et trois de ses évènements A, B et C donnant l'arbre de probabilités ci-dessous :



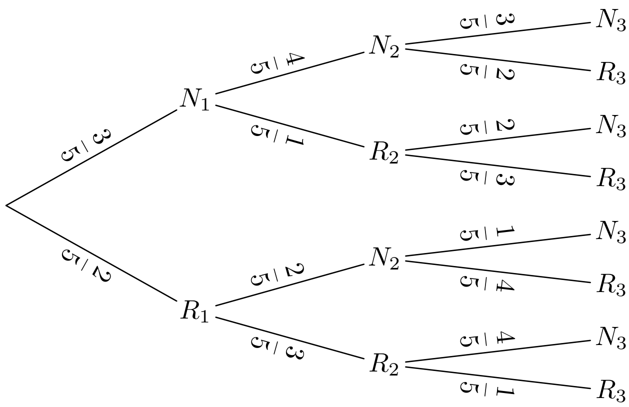
1. Déterminer la probabilité de l'évènement C.
2. Etablir que les évènements A et C sont indépendant?

Exercice 3738

On considère trois urnes qui contiennent chacune des boules noires et rouges.

Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de chaque urne. Pour tout $i\in\{1;2;3\}$, on considère les évènements suivants :
- N_i : *"on tire une boule noire de l'urne U_i"* ;
- R_i : *"on tire une boule rouge de l'urne U_i"*.

On considère l'arbre de probabilité suivant :



1. Déterminer la probabilité de l'évènement N_3.
2. Les évènements N_1 et N_3 sont-ils indépendant?

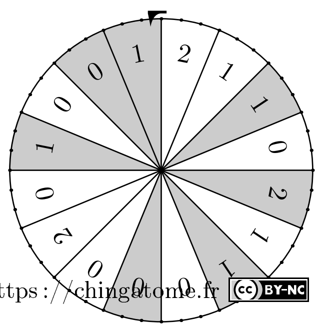
255. Exercices non-classés :

(+16 exercices pour les enseignants)

Exercice 5834

Un jeu consiste à faire tourner la roue ci-contre une première fois et de noter la couleur de la case obtenue, puis de faire tourner la roue une seconde fois et de noter le nombre obtenu.

Les deux lancers de la roue sont évidemment indépendants entre eux.



On considère les deux évène-

- A : "*la case obtenue est grise lors du premier tirage*" ;
- B : "*la case obtenue porte le numéro* 0 *lors du second tirage*".

1. Justifier que : $\mathcal{P}_A(B)=\mathcal{P}(B)$
2. Dresser un arbre de probabilité représentant ce jeu.

Exercice 3737

Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article ; un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'entreprise A pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de soudure avec une probabilité égale à 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à 0,02.

Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1. Montrer que la probabilité qu'un article fabriqué par l'entreprise A soit défectueux est égale à 0,049 4.
2. Une grande surface reçoit 800 articles de l'entreprise A. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui à cet ensemble de 800 articles associe le nombre d'articles défectueux.
   a. Définir la loi de $\mathcal{X}$.
   b. Calculer l'espérance mathématique de $\mathcal{X}$. Pour l'entreprise, quelle interprétation peut-on faire de cette espérance?

Exercice 3734

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par p_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer la face numérotée k (*k est un entier et* $1\leqslant k\leqslant 6$).

Ce dé a été pipé de telle sorte que :

- les six faces ne sont pas équiprobables ;
- les nombres p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r ;
- les nombres p_1, p_2, p_4 dans cet ordre, sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

1. Démontrer que :
   $p_k = \dfrac{k}{21}$ pour tout entier k tel que $1\leqslant k\leqslant 6$.
2. On lance ce dé une fois et on considère les évènements suivants :
   - A : "*le nombre obtenu est pair*" ;
   - B : "*le nombre obtenu est supérieur ou égal à* 3" ;
   - C : "*le nombre obtenu est* 3 *ou* 4".

   a. Calculer la probabilité de chacun de ces évènements.
   b. Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3 sachant qu'il est pair.
   c. Les évènements A et B sont-ils indépendants? Les évènements A et C sont-ils indépendants?