Première Spécialité/Nombres dérivés

D'autres exercices pour ce chapitre sont disponibles en suivant le lien :
https://chingatome.fr/chapitre/hp-lycee/derivees

ChingEval : 4 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

1. Rappels : manipulation d'expressions rationnelles :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 8366

1. Etablir l'identité ci-dessous :
$$\frac{2}{x}+\frac{5}{x+1}=\frac{7\cdot x+2}{x\cdot(x+1)}$$

2. Simplifier les expressions ci-dessous sous la forme d'un quotient où :
   - le numérateur est développé et réduit
   - le dénominateur est écrit sous la forme d'un produit.

   a. $\dfrac{x}{2\cdot x-1}+\dfrac{4}{x+1}$ b. $\dfrac{x+3}{x^2+1}-\dfrac{4}{x+3}$

Exercice 6002

Etablir les égalités suivantes :

a. $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2x-3}{x-1}=\dfrac{3-x^2}{x^2-1}$

b. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{2x^2+4x+1}{x\cdot(x+1)^2}$

c. $\dfrac{\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{2x-1}}{x}=\dfrac{4x+1}{x\cdot(x+1)\cdot(2x-1)}$

2. Travail préliminaire sur l'obtention des nombres dérivés :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 8368

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=x^2+x+1$

   Etablir les égalités suivantes :

   a. $f(1+\pi)=\pi^2+3\cdot\pi+3$

   b. $f(2+h)=h^2+5\cdot h+7$ où $h\in\mathbb{R}$

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x)=\frac{x+1}{x^2+1}$$
   Pour $h\in\mathbb{R}$, établir l'égalité suivante :
$$g(1+h)-g(1)=\frac{-h\cdot(h+1)}{h^2+2\cdot h+2}$$

Exercice 6060

Soit f la fonction définie par la relation :
$f(x)=x^2-3\cdot x+2$

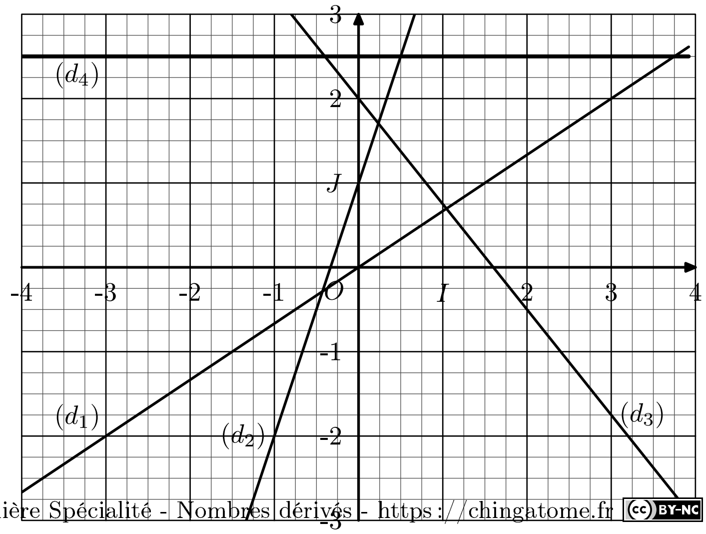
Déterminer, pour $h\in\mathbb{R}$, un expression simplifiée de $f(1+h)$.

3. Approche des tangentes et coefficient directeur des fonctions affines :

(+2 exercices pour les ens

Exercice 2291

Déterminer les coefficients directeurs des quatre droites représentées ci-dessous :

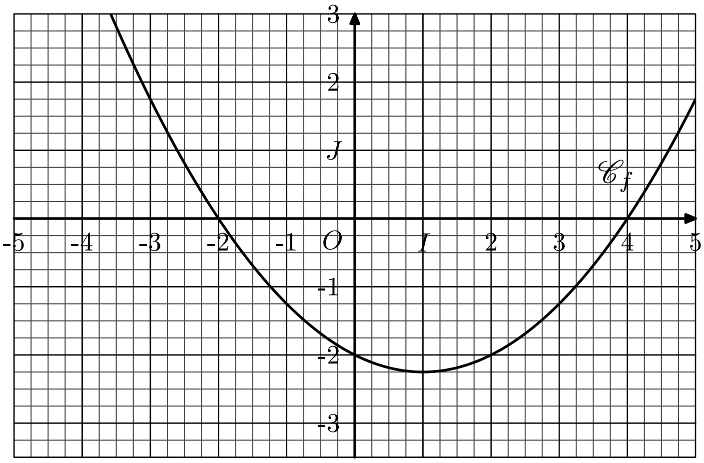


Exercice 4713

On considère la fonction f définie par la relation est :

$$f(x) = \frac{1}{4}\cdot x^2 - \frac{1}{2}\cdot x - 2$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f :



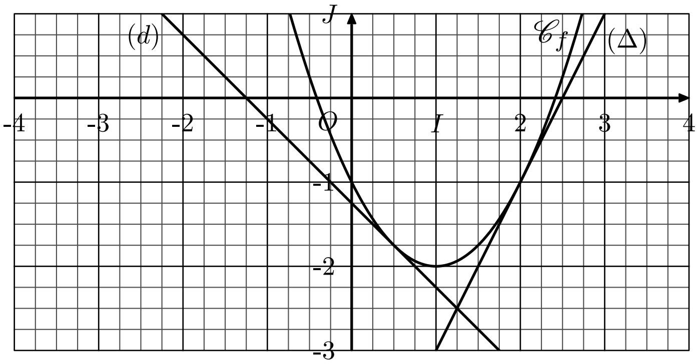
1. a. Effectuer le tracé de la droite (d) dont l'équation est :
$$y = \frac{1}{2}\cdot x - 3$$
   b. Effectuer le tracé de la droite (Δ) dont l'équation est :
$$y = -\frac{3}{2}\cdot x - 3$$

2. Quelle particularité possède les droites (d) et (Δ) relativement à la courbe $\mathscr{C}_f$?

Exercice 5937

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$$f(x) = x^2 - 2\cdot x - 1$$

On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé. On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f.



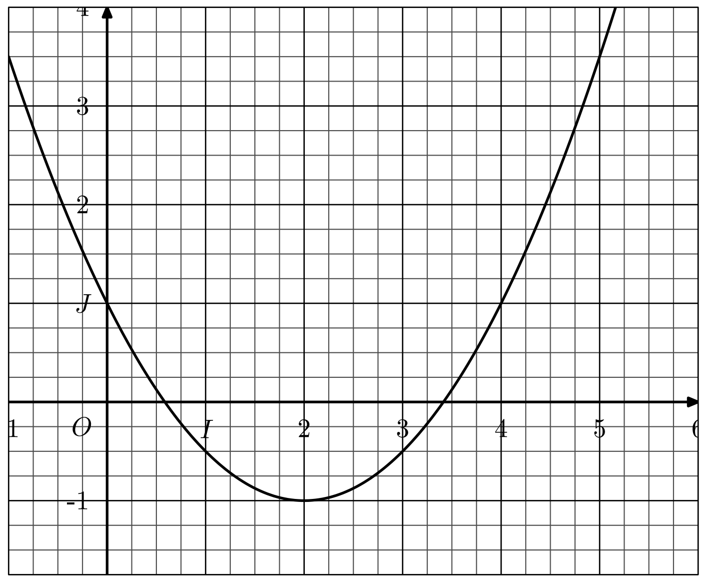
On note respectivement (d) et (Δ) les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ et 2.

1. Déterminer les coordonnées des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant respectivement $\frac{1}{2}$ et 2 pour abscisse.

2. a. Graphiquement, donner l'équation cartésienne de la droite (d).
   b. Déterminer l'équation réduite de la droite (Δ).

Exercice 6878

On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction dans un repère $(0\,;\,I\,;\,J)$:

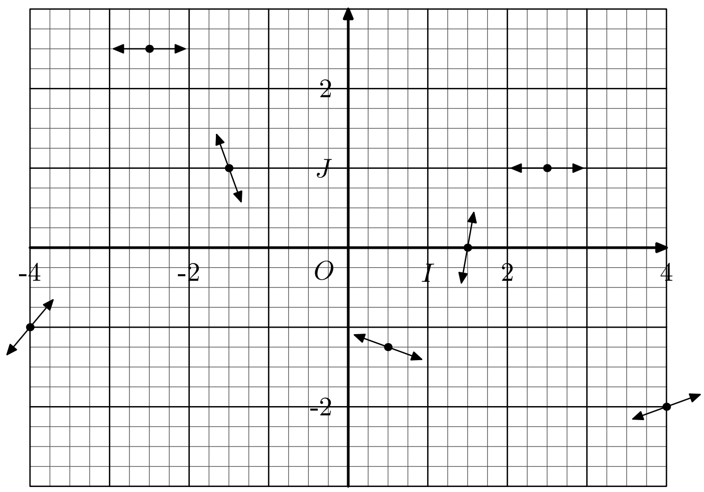


1. a. Tracer la tangente (d) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 4.
   b. Donner le coefficient directeur de la droite (d).

2. a. Tracer la tangente (Δ) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
   b. Donner le coefficient directeur de la droite (Δ).

Exercice 2313

Tracer la courbe représentative d'une fonction passant par tous les points indiquées et respectant en chacun d'eux la tangente représentée :



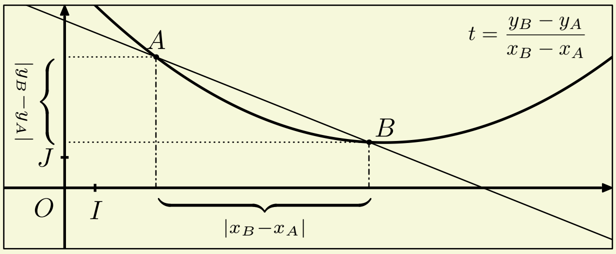
4. Taux d'accroissement :

(+1 exercice pour les enseignants)

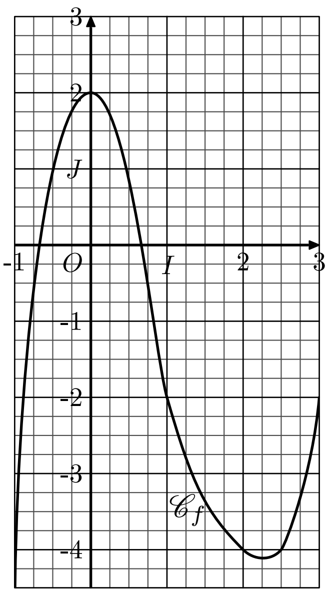
Exercice 2292

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a, b deux nombres réels appartenant à I.
On appelle taux d'accroissement de la fonction f entre a et b, le nombre t définit par :
$$t = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Remarque : Dans un repère et en considérant la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f sur I, le taux d'acrroissement de la fonction f entre a et b correspond au coefficient directeur de la courbe entre les points A et B d'abscisse respective a et b :



Dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé ci-contre est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.
On considère les points A, B, C de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives 0, 1 et 2



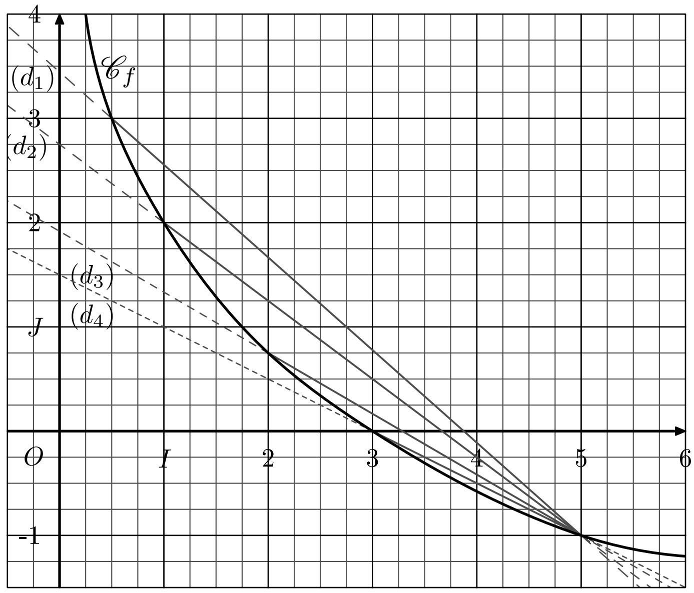
1. Placer les points A, B et C et par lecture graphique, donner leur coordonnée.

2. Calculer le taux d'accroissement de la fonction f :
   a. entre 0 et 2
   b. entre 1 et 2

Exercice 5945

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ dans lequel sont représentées :

- La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f ;
- Les cordes (d_1), (d_2), (d_3) et (d_4) à la courbe $\mathscr{C}_f$ respectivement aux points d'abscisses 0,5 et 5, 1 et 5, 2 et 5, 3 et 5.



1. Déterminer les coefficients directeurs des quatre cordes à la courbe $\mathscr{C}_f$.
   On donnera, si nécessaire, les valeurs arrondies au millième près.

2. a. Tracer, à l'aide d'un règle, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées $(5\,;-1)$.
   b. Donner une valeur approchée du coefficient directeur de la tangente (T).

5. *Première notion de limites :*

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 2295

Première approche de la notion de limite et de convergence :
Pour une valeur *(terme d'une suite ou image par une fonction)* assujetti à la variation d'un paramètre *(rang du terme ou variation de la variable)* lorsque celle-ci se "*stabilise*" vers une valeur, on parle alors de **convergence**.
Dans le cas d'une convergence, on parlera de *valeur* ***limite***

1. a. Saisir le code suivant dans votre éditeur Python :

```
x=1;
for i in range(1,10):
    x=x/10
    y=(x*x+x)/(2*x*x+3*x)
    print(x,"\t",y)
```

   b. Après l'exécution de ce code et en analysant l'affichage de la console, répondre aux questions suivantes :
   - Les valeurs successives prises par la variable `x` semble se stabiliser vers quelles vleurs?
   - Même question, pour les valeurs successives de la variable `y`?

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$$f(x) = \frac{x^2+x}{2{\cdot}x^2+3{\cdot}x}$$
Le tableau de valeurs, ci-contre, de la fonction f présente des valeurs de x se *stabilisant* vers 0, on remarque que leurs images convergent vers $\dfrac{1}{3}$.

x	$f(x)$
1	0,4
0,1	0,34375
0,01	0,33343708...
0,001	0,33334444...
0,0001	0,33333444...
0,00001	0,33333334...

On peut conjecturer que "*la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 a pour valeur $\dfrac{1}{3}$*" et on note : $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0} f(x) = \frac{1}{3}$

2. A l'aide du programme précédent, conjecturer la valeur des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0} \frac{x+1}{x+2}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0} \frac{1+x}{x}$ c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0} \frac{3x^2+x}{x^2}$

Exercice 2803

On considère trois fonctions f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par les relations :

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{2{\cdot}x-1}{\sqrt{x}} \quad ; \quad h(x) = \frac{2{\cdot}x^2+x}{5{\cdot}x}$$

1. Vérifier l'exactitude des égalités suivantes :

$$f(0{,}01) = \frac{2{,}01}{3{,}00101} \;;\; g(0{,}0001) = \frac{-0{,}9998}{0{,}01} \;;\; h(0{,}01) = \frac{0{,}0102}{0{,}05}$$

2. On donne, ci-dessous, les tableaux de valeurs des fonctions f, g et h :

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2{,}1}{3{,}01}$	$\frac{2{,}01}{3{,}000\,1}$	$\frac{2{,}00\,1}{3{,}000\,001}$	$\frac{2{,}000\,1}{3{,}000\,000\,01}$

x	1	0,01	0,000 1	0,000 001
$g(x)$	1	$\frac{-0{,}98}{0{,}1}$	$\frac{-0{,}999\,8}{0{,}01}$	$\frac{-0{,}999\,998}{0{,}00\,1}$

x	1	0,1	0,01	0,001	0,000 1
$h(x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{0{,}12}{0{,}5}$	$\frac{0{,}010\,2}{0{,}05}$	$\frac{0{,}001\,002}{0{,}005}$	$\frac{0{,}000\,100\,02}{0{,}000\,5}$

Compléter le tableau ci-dessous à l'aide des valeurs arrondies au dix-millième près :

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$
1			
0,1			
0,01			
0,001			
0,0001			
0,00001			
0,000001			

3. Conjecturer la valeur des trois limites suivantes :

$\displaystyle\lim_{x\mapsto 0} f(x)$; $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0} g(x)$; $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0} h(x)$

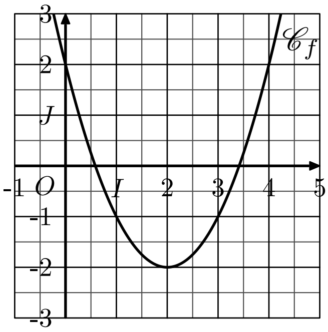
6. Introduction au nombre dérivé :

Exercice 6059

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = x^2 - 4x + 2$$

Au cours de cet exercice, nous allons déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(1\,;-1)$.



1. a. Etablir l'égalité suivante :

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = x-3 \qquad \text{pour tout } x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$$

b. En déduire le coefficient directeur de la corde à la courbe $\mathscr{C}_f$ passant par les points A et $B(2\,;-2)$. Vérifier graphiquement votre réponse.

2. On considère les deux fonctions u et v définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par les relations :

$$u(x) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \quad ; \quad v(x) = x-3$$

a. Voici deux tableaux de valeurs de u et de v :

x	1,1	1,01	1,001	1,000 1
$u(x)$	$\frac{-0{,}19}{0{,}1}$	$\frac{-0{,}0199}{0{,}01}$	$\frac{-0{,}001999}{0{,}001}$	$\frac{-0{,}00019999}{0{,}0001}$

x	1,1	1,01	1,001	1,000 1
$v(x)$	$-1{,}9$	$-1{,}99$	$-1{,}999$	$-1{,}9999$

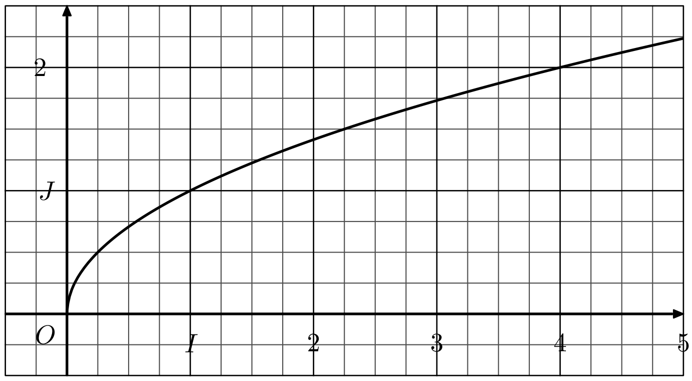
Que peut-on dire de la valeur de $u(x)$ lorsque le nombre x se rapproche de la valeur 1?

b. Tracer dans le repère la droite (d) d'équation :

(d) : $y = -2x+1$

Exercice 5946

On considère la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction racine carrée donnée ci-dessous dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé.



1. Tracer la corde $(\mathcal{D})$ de la courbe $\mathscr{C}$ passant par les points d'abscisse 2 et 4.

2. On considère la fonction u définie par : $u(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

Justifier que le coefficient directeur de la corde $(\mathcal{D})$ est $u(2)$.

3. On considère la fonction v définie par : $v(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$

a. Etablir l'égalité $u(x)=v(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{4\}$.

b. Les fonctions u et v sont-elles définies pour $x=4$?

4. a. Voici un tableau "*presque*" de valeurs pour chacune des fonctions u et v :

x	4,41	4,0401	4,004001	4,00040001
$u(x)$	$\dfrac{0{,}1}{0{,}41}$	$\dfrac{0{,}01}{0{,}0401}$	$\dfrac{0{,}001}{0{,}004001}$	$\dfrac{0{,}0001}{0{,}00040001}$

x	4,41	4,0401	4,004001	4,00040001
$v(x)$	$\dfrac{1}{4{,}1}$	$\dfrac{1}{4{,}01}$	$\dfrac{1}{4{,}001}$	$\dfrac{1}{4{,}0001}$

Donner les valeurs approchées à 10^{-5} des images par les fonctions u ou v dans le tableau ci-dessus.

b. Quelle valeur peut-on conjecturer pour la limite :
$$\lim_{x\mapsto 4} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4}?$$

7. Calcul de nombre dérivé :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 727

Déterminons les nombres dérivés de quelques fonctions de référence pour $x=3$

1. Le nombre dérivé de la fonction carré en 3 :

a. Pour $x\neq 3$, établir l'égalité suivante : $\dfrac{x^2-3^2}{x-3}=x+3$

b. Soit f la fonction carré.

En déduire la valeur de la limite : $\displaystyle\lim_{x\mapsto 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$

2. Le nombre dérivée de la fonction inverse en 3 :

a. Pour $x\neq 3$, établir l'égalité suivante : $\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}=\dfrac{-1}{3x}$

b. Soit g la fonction inverse.

En déduire la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\mapsto 3} \frac{g(x)-g(3)}{x-3}$

3. Le nombre dérivée de la fonction racine carrée en 3 :

a. Pour $x\neq 3$, établir que : $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$

b. Soit h la fonction racine carrée.

En déduire la valeur de la limite : $\displaystyle\lim_{x\mapsto 3} \frac{h(x)-h(3)}{x-3}$

Exercice 2822

On considère la fonction f définie par :
$f: x \longmapsto 3{\cdot}x^2-2x$

Montrer que : $\displaystyle f'(2)=\lim_{h\mapsto 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}=10$

8. Calcul de nombres dérivées et tangentes :

(+1 exercice pour les enseignants)

Remarque : Ici, dans les corrections, je n'utilise pas l'expression de la tangente à une courbe.

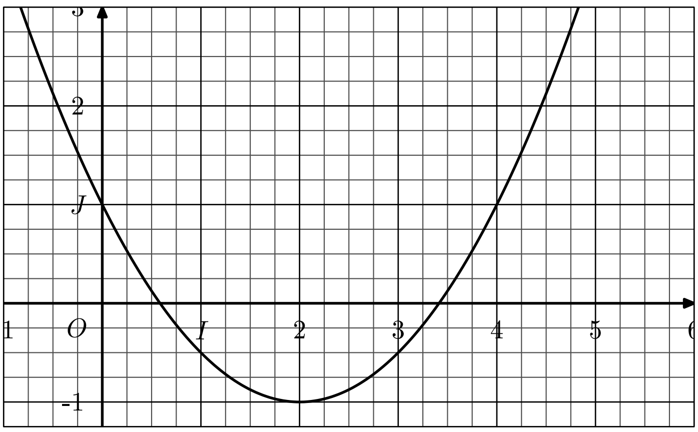
Exercice 2810

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f: x \longmapsto \frac{1}{2}{\cdot}x^2-2{\cdot}x+1$

1. a. Montrer que, pour tout $h\in\mathbb{R}$, on a :
$f(4+h)-f(4)=\frac{1}{2}{\cdot}h^2+2{\cdot}h$

b. Déterminer la valeur de la limite : $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h}$

2. Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



a. Tracer dans le repère ci-dessous, la droite (d) admettant pour équation réduite : $y=2x-7$

b. Justifier que la droite (d) est une tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ dont on précisera le point de contact.

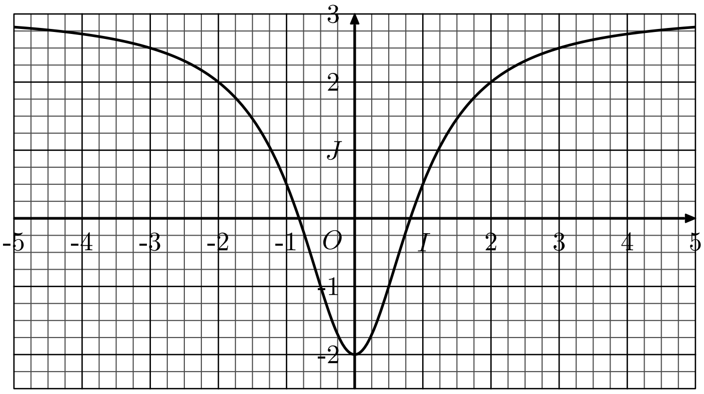
Exercice 2843

Soit f la fonction dont l'image d'un nombre réel x est définie par la relation : $f(x)=\dfrac{3{\cdot}x^2-2}{x^2+1}$

1. a. Pour tout nombre réel h non-nul, établir l'égalité :
$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{5{\cdot}h + 10}{2{\cdot}h^2 + 4{\cdot}h + 4}$$

b. En déduire la valeur du nombre dérivée $f'(1)$ de la fonction f en 1.

2. On considère le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ et on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.



a. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

b. Tracer la tangente (T) dans le repère.

3. Déterminer les coordonnées des différents point d'intersection de (T) et de $\mathscr{C}_f$.

9. Nombres dérivés et racines carrées :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 6044

On considère la fonction f définie sur $\Big[-\frac{5}{2}\,;+\infty\Big[$ par la relation : $f(x) = \sqrt{2{\cdot}x + 5}$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé.

1. a. Justifier l'égalité suivante pour $h\in\big[-1\,;1\big]\backslash\{0\}$:
$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{2}{\sqrt{2{\cdot}h + 9} + 3}$$

b. En déduire la valeur du nombre dérivée de la fonction f pour $x{=}2$.

2. En déduire l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Exercice 2836

On considère la fonction f dont l'image de x est définie par : $f(x) = \sqrt{5 - 2{\cdot}x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2. a. Pour tout nombre réel h vérifiant :
$h{\neq}0 \quad ; \quad -2{+}h{\in}\mathcal{D}_f$

Etablir l'égalité : $\dfrac{f(-2{+}h) - f(-2)}{h} = \dfrac{-2}{\sqrt{9 - 2{\cdot}h} + 3}$

b. En déduire la valeur du nombre dérivée de la fonction f en -2.

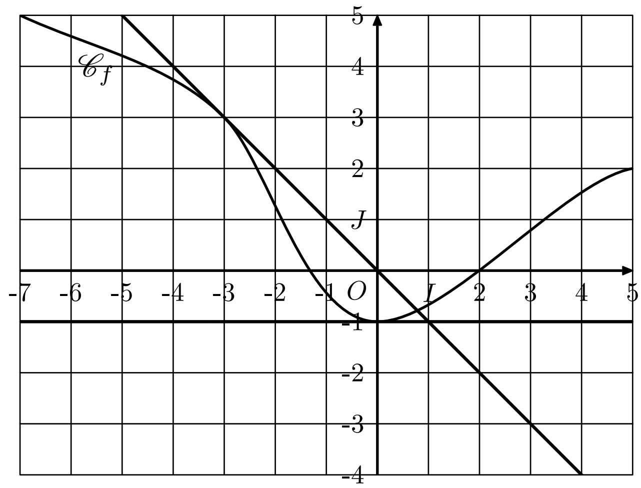
3. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2.

10. Nombre dérivée : lecture graphique :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 7714

La représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est tracée ci-dessous ainsi que les tangentes respectives aux points d'abscisses -3 et 0.



Parmi les quatre réponses ci-dessous, laquelle est correcte :

a. Le nombre dérivé de f en 0 vaut -1

b. Le nombre dérivé de f en -1 vaut 0

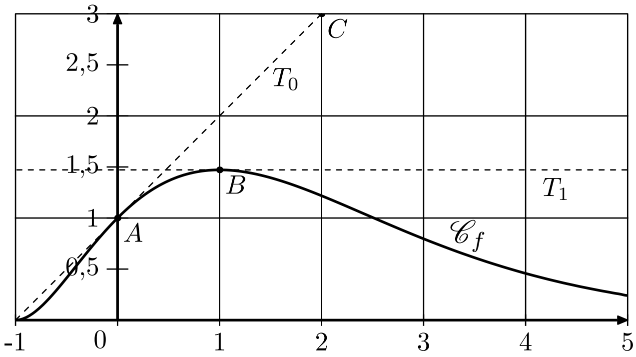
c. Le nombre dérivé de f en -3 vaut -1

d. Le nombre dérivé de f en -3 vaut 3

Exercice 7715

Dans ce questionnaire à choix multiples, aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est correcte.
Une bonne réponse rapporte 0,75 point.
Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point.
Noter sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Dans un repère orthonormé du plan, on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $\big[-1\,;5\big]$.
On note f' la fonction dérivée de f.
La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A(0\,;1)$ et par le point B d'abscisse 1.
La tangente T_0 à la courbe au point A passe par le point $C(2\,;3)$ et la tangente T_1 au point B est parallèle à l'axe des abscisses.



1. La valeur exacte du nombre dérivé de la fonction f en 1 est :

   a. 0 b. 1 c. 1,6 d. autre réponse

2. La valeur exacte du nombre dérivé de la fonction f en 0 est :

   a. 0 b. 1 c. 1,6 d. autre réponse

3. La valeur exacte de $f(1)$ est :

   a. 0 b. 1 c. 1,6 d. autre réponse

255. *Exercices non-classés :*

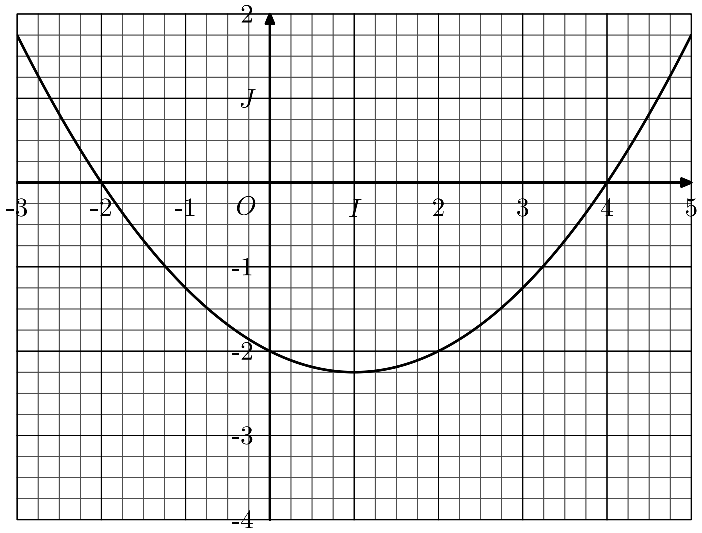
(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 7089

On considère la fonction f définie par la relation est :

$$f(x) = \frac{1}{4}{\cdot}x^2 - \frac{1}{2}{\cdot}x - 2$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\big(O\,;I\,;J\big)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f :



1. a. Effectuer le tracé de la droite (d) dont l'équation est :
$$y = \frac{1}{2}{\cdot}x - 3$$
   b. Comment s'appelle la droite (d) relativement à la courbe $\mathscr{C}_f$?

2. a. Effectuer le tracé de la droite (Δ) dont l'équation est :
$$y = -\frac{3}{2}{\cdot}x - 3$$
   b. Comment s'appelle la droite (Δ) relativement à la courbe $\mathscr{C}_f$?

Exercice 5177

On considère la fonction f dont l'image de x, pour $x \in [1\,;+\infty[$, est définie par la relation :

$$f(x) = (x^2 - 4{\cdot}x + 3)\sqrt{2{\cdot}x - 2}$$

1. Donner une forme simplifiée de : $\dfrac{f(1+h)}{h}$ pour $h > 0$

2. En déduire le nombre dérivée de la fonction f en 1.

Exercice 2925

On considère la fonction f, définie sur $\Big[-\frac{1}{5}\,;+\infty\Big[$, dont l'image d'un nombre réel x est donnée par la relation :

$$f(x) = \sqrt{5{\cdot}x + 1}$$

1. Pour $x \in \mathcal{D}_f$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $h \neq 0$ et $(x+h) \in \mathcal{D}_f$, établir l'égalité suivante :
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{5}{\sqrt{5{\cdot}x + 5{\cdot}h + 1} + \sqrt{5{\cdot}x + 1}}$$

2. En déduire l'expression de la fonction dérivée de la fonction f.

