Première Spécialité/Fonctions dérivées

D'autres exercices pour ce chapitre sont disponibles en suivant le lien :
https://chingatome.fr/chapitre/hp-lycee/derivees

1. Fonction dérivée : relation graphique :

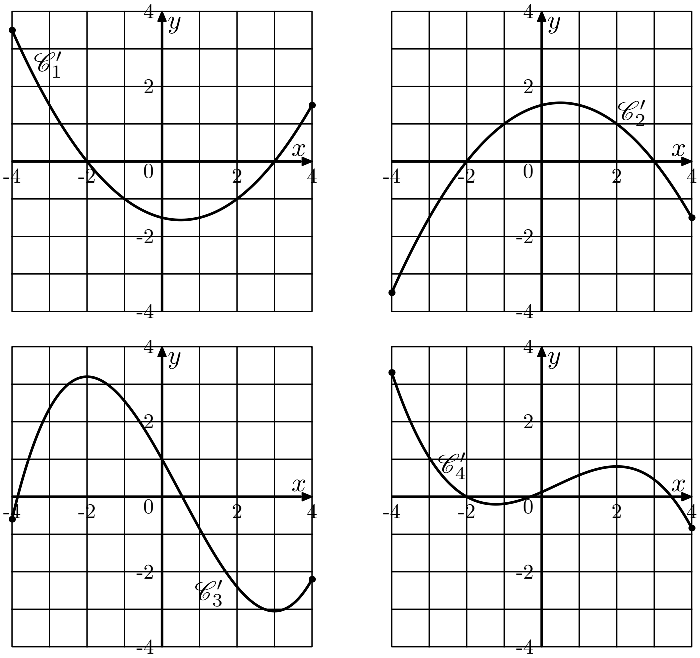
(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 7748

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $\big[-4\,;4\big]$ et dont on connait les propriétés suivantes :

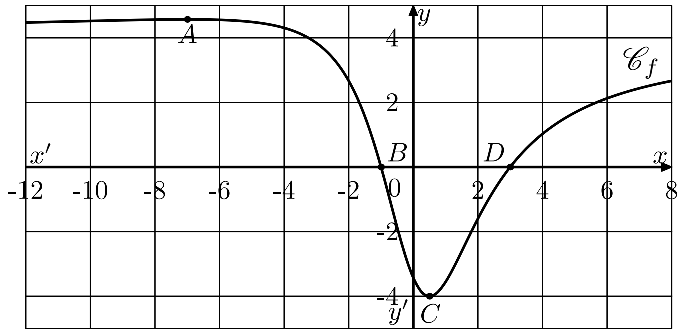
- la fonction f admet un maximum en -2 sur l'intervalle $\big[-3\,;0\big]$.
- la fonction f admet un minimum en 3 sur l'intervalle $\big[1\,;4\big]$.

Parmi les quatre courbes représentatives ci-dessous, une seule est la courbe représentative de la fonction f' dérivée de la fonction f.



Exercice 5731

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé :



- La courbe $\mathscr{C}_f$ admet deux tangentes horizontales aux points A et C d'abscisses respectives -7 et $\dfrac{1}{2}$;
- La courbe $\mathscr{C}_f$ intercepte l'axe des abscisses aux points B et D de coordonnées respectives $(-1\,;0)$ et $(3\,;0)$.

1. On considère la fonction g qui admet pour dérivée la fonction f *($g'=f$)*. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

2. On considère la fonction h qui est la dérivée de la fonction f *($f'=h$)*. Dresser le tableau de signes de la fonction h.

2. Produits : fonctions dérivées :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 7511

On considère les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$u(x) = 3{\cdot}x - 2 \quad ; \quad v(x) = 2 - x$

1. On définit la fonction f définie par la relation $f = u{\cdot}v$. Déterminer les images ci-dessous par la fonction f :

   a. $f(1)$ b. $f(3)$ c. $f\Big(-\dfrac{1}{3}\Big)$

2. On définit la fonction g définie par la relation $g = \dfrac{u}{v}$. Déterminer, si possible, les images ci-dessous par la fonction g :

   a. $g(0)$ b. $g(2)$ c. $g\Big(-\dfrac{1}{4}\Big)$

Exercice 105

Pour deux fonctions u et v définies sur un intervalle I, la fonction produit $u{\cdot}v$ admet pour dérivée la fonction notée $(u{\cdot}v)'$ définie pour tout $x \in I$ par :

$$\big(u\cdot v\big)'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

1. Compléter le tableau ci-dessous, où la fonction u' *(resp. v')* est la fonction dérivée de la fonction u *(resp. v)* :

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$3{\cdot}x^2{+}3{\cdot}x$	$2{\cdot}x+2$		
$2{\cdot}x^2{+}1$	$\sqrt{x}$		
$\dfrac{1}{x}$	$3-x^2$		
$\dfrac{2}{x}$	$\sqrt{x}$		

2. Pour chacune des lignes du tableau, montrer que la fonction f admet la fonction f' pour fonction dérivée :

$f(x)$	$f'(x)$
$(3{\cdot}x^2+3{\cdot}x)(2{\cdot}x+2)$	$18{\cdot}x^2+24{\cdot}x+6$
$(2{\cdot}x^2+1)\sqrt{x}$	$\dfrac{10{\cdot}x^2+1}{2\sqrt{x}}$
$\dfrac{1}{x}{\cdot}(3-x^2)$	$\dfrac{-x^2-3}{x^2}$
$\dfrac{2}{x}{\cdot}\sqrt{x}$	$-\dfrac{1}{x{\cdot}\sqrt{x}}$

Exercice 4686

1. Pour chacune des fonctions u *(resp.* v*)*, donner l'expression de sa fonction dérivée u' *(resp v')* :

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$3{\cdot}x^2-2$	$8-x$		
$\dfrac{1}{x}$	x^2-1		
$5{\cdot}x+\dfrac{2}{x}$	$3-2{\cdot}x^3$		
x	$\sqrt{x}$		

2. Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer l'expression de sa fonction dérivée :

a. $f : x \longmapsto \big(3{\cdot}x^2-2\big)\big(8-x\big)$

b. $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x}{\cdot}\big(x^2-1\big)$

c. $h : x \longmapsto \Big(5{\cdot}x+\dfrac{2}{x}\Big)\big(3-2{\cdot}x^3\big)$

d. $j : x \longmapsto x{\cdot}\sqrt{x}$

Exercice 5226

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

1. $f \colon x \longmapsto (3-x){\cdot}\dfrac{1}{x}$

2. $g \colon x \longmapsto (x^2-3){\cdot}\sqrt{x}$

On donnera l'expression des fonctions dérivées sous la forme d'un **quotient simplifié**.

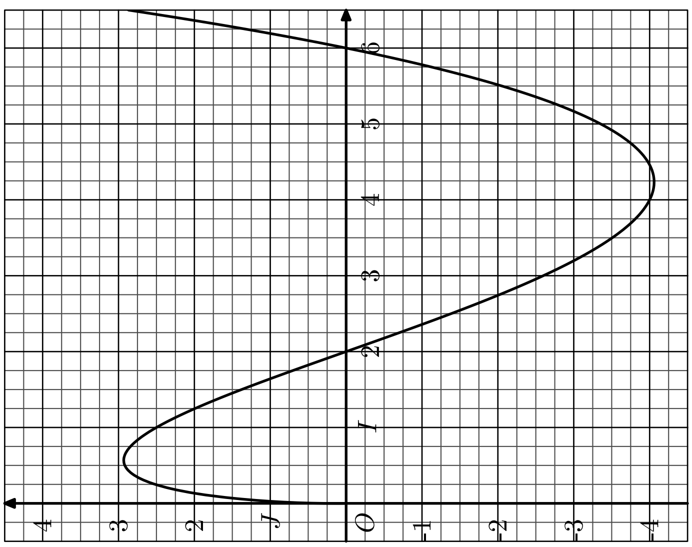
3. Produits : fonctions dérivées vers tangentes :

Exercice 4715

On considère la fonction f définie par la relation est :

$$f(x) = \sqrt{x}{\cdot}\Big(\frac{1}{2}{\cdot}x^2-4x+6\Big)$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\big(O\,;I\,;J\big)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f :



1. a. Effectuer le tracé de la droite (d) dont l'équation est :
$$y = -\frac{1}{2}{\cdot}x-2$$
   b. Effectuer le tracé de la droite (Δ) dont l'équation est :
$$y = -\frac{7}{4}{\cdot}x+\frac{17}{4}$$

2. a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de la fonction f.
   b. Donner les valeurs des nombres dérivées de la fonction f en 1 et 4.

4. Produits : tangentes :

(+1 exercice pour les enseignants)

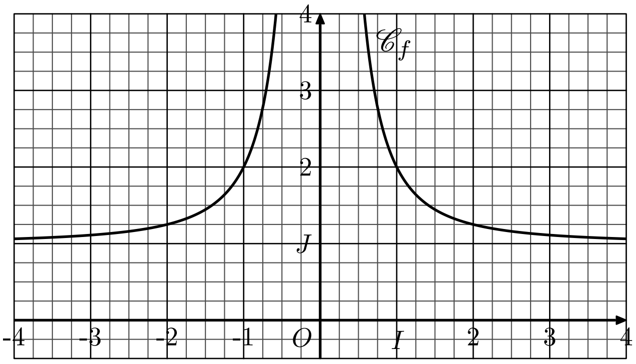
Exercice 7719

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x}\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

1. Etablir que la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression : $f'(x)=-\dfrac{2}{x^3}$

2. On donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère $(O\,;I\,;J)$:



   a. Donner la valeur des nombres $f(2)$ et $f'(2)$.

   b. En déduire l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

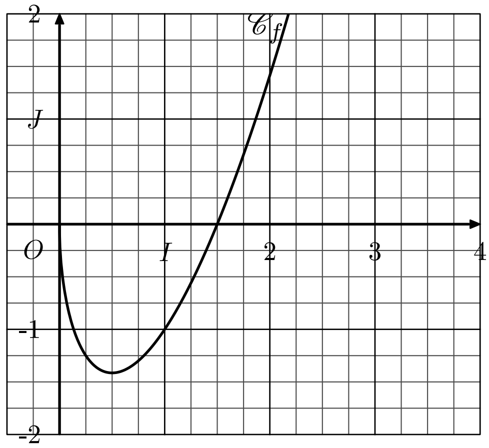
   c. Tracer la tangente (T) dans le repère ci-dessus.

Exercice 8193

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x)=(2\cdot x-3)\cdot\sqrt{x}$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f est donnée dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



1. Etablir que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression :
$$f'(x)=\frac{6x-3}{2\sqrt{x}}$$

2. a. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

   b. Tracer dans le repère ci-dessus la tangente (T).

5. Produits : variations :

Exercice 2668

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par l'expression :

$$f(x)=\left(5x^2+5x-4\right)\cdot\sqrt{x}$$

1. Etablir que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression :
$$f'(x)=\frac{25\cdot x^2+15\cdot x-4}{2\cdot\sqrt{x}}$$

2. Dresser le tableau de signes de la fonction f' sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. En admettant les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto 0^+} f(x)=0 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto +\infty} f(x)=+\infty$$
Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Exercice 2842

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par l'expression :

$$f : x\longmapsto \sqrt{x}\cdot\left(-5x^2-5x-1\right)+\frac{1}{2}$$

1. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f.

2. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.
On admet la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\mapsto +\infty} f(x)=-\infty$

3. a. Justifier que la fonction f s'annule une seule fois sur son ensemble de définition.

   b. Justifier, à l'aide de valeur approchée, que la fonction f s'annule entre $\dfrac{1}{10}$ et $\dfrac{15}{100}$.

7. Quotients : fonction dérivée :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 4688

Proposition :
Soit u et v deux fonctions définies sur un intervalle I telles que v ne s'annule pas sur v. On considère la fonction f définie sur I par : $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$

La fonction f admet pour fonction dérivée la fonction f' définit par :

$$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}$$

1. Pour chaque ligne, donner l'expression de la fonction u' *(resp. v')* dérivée de la fonction u *(resp. u')* :

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$5{\cdot}x+2$	$3{\cdot}x-2$		
x^2-3	$x+1$		
x^2+x+1	$2{\cdot}x^2-1$		

2. Pour chacune des fonctions f ci-dessous, on établira l'expression proposée de sa fonction dérivée f' :

$f(x)$	$f'(x)$
$\dfrac{5{\cdot}x+2}{3{\cdot}x-2}$	$\dfrac{-16}{(3{\cdot}x-2)^2}$
$\dfrac{x^2-3}{x+1}$	$\dfrac{x^2+2{\cdot}x+3}{(x+1)^2}$
$\dfrac{x^2+x+1}{2{\cdot}x^2-1}$	$\dfrac{-2{\cdot}x^2-6{\cdot}x-1}{(2{\cdot}x^2-1)^2}$

Exercice 5225

1. Pour chaque ligne, donner l'expression de la fonction u' *(resp. v')* dérivée de la fonction u *(resp. u')* :

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$3-2x$	$x+1$		
x^2+4x-1	$2x-1$		
4	$x^2-2{\cdot}x+3$		

2. Pour chacune des lignes ci-dessous, établir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$f(x)$	$f'(x)$
$\dfrac{3-2{\cdot}x}{x+1}$	$-\dfrac{5}{(x+1)^2}$
$\dfrac{x^2+4{\cdot}x-1}{2{\cdot}x-1}$	$\dfrac{2{\cdot}x^2-2{\cdot}x-2}{(2{\cdot}x-1)^2}$
$\dfrac{4}{x^2-2x+3}$	$\dfrac{-8x+8}{(x^2-2x+3)^2}$

Exercice 8398

1. Pour chaque ligne, donner l'expression de la fonction u' *(resp. v')* dérivée de la fonction u *(resp. u')* :

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
3	$2-x$		
$2x-1$	x^2+x		

2. Pour chacune des lignes ci-dessous, établir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$f(x)$	$f'(x)$
$\dfrac{3}{2-x}$	$\dfrac{3}{(x-2)^2}$
$\dfrac{2{\cdot}x-1}{x^2+x}$	$-\dfrac{2{\cdot}x^2-2{\cdot}x-1}{x^2{\cdot}(x+1)^2}$

Exercice 4828

On considère la fonction h dont l'image de x est défini par la relation :

$$h(x)=\frac{x^2-2{\cdot}x+1}{x^2-5{\cdot}x+6}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.
2. Montrer que le nombre de dérivée de h en x s'exprime par :

$$h'(x)=\frac{-3{\cdot}x^2+10{\cdot}x-7}{(x^2-5{\cdot}x+6)^2}$$

8. Quotients : fonctions dérivées et racines carrées :

Exercice 2320

Le tableau ci-dessous vous présente, pour chaque ligne, l'expression de l'image de x par une fonction et l'expression du nombre dérivé en x de cette fonction. Vérifier l'exactitude de l'expression du nombre dérivé en x :

Fonction	Image de x	Nombre dérivé en x
f	$\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$	$\dfrac{-x+1}{2\sqrt{x}{\cdot}(x+1)^2}$
g	$(x^2-3){\cdot}\sqrt{x}$	$\dfrac{5{\cdot}x^2-3}{2{\cdot}\sqrt{x}}$

Exercice 5349

On considère les deux fonctions f et g définies par les relations :

$$f(x)=\big(x^2-3{\cdot}x\big){\cdot}\sqrt{x}\quad ; \quad g(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

Déterminer les expressions des fonctions dérivées f' et g' sous la forme de quotients simplifiés.

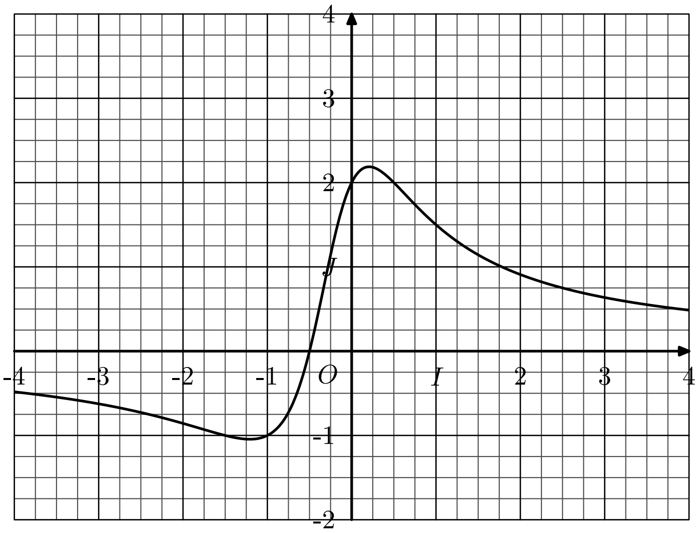
9. Quotients : fonctions dérivées et tangentes :

Exercice 4717

On considère la fonction f définie par la relation est :

$$f(x) = \frac{4{\cdot}x+2}{2{\cdot}x^2+x+1}$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f :



1. a. Effectuer le tracé de la droite (d_1) dont l'équation est :
$y = \frac{1}{2}{\cdot}x - \frac{1}{2}$

   b. Effectuer le tracé de la droite (d_2) dont l'équation est :
$y = 2{\cdot}x+2$

   c. Effectuer le tracé de la droite (d_3) dont l'équation est :
$y = -x + \frac{5}{2}$

2. a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de la fonction f.

   b. Donner les valeurs des nombres dérivées de la fonction f en -1, 0 et $\frac{1}{2}$.

10. Quotients : tangentes :

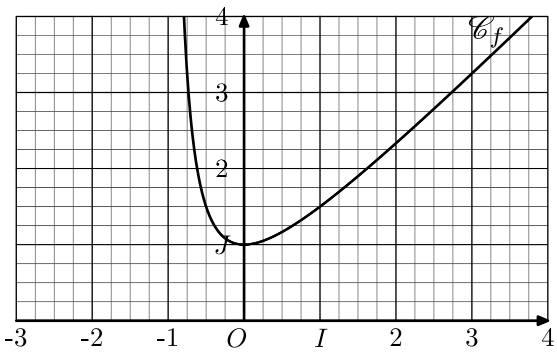
(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 4883

On considère la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ dont l'expression est donnée par la relation :

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}$$

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



1. Etablir que la fonction f' dérivée de la fonction f a pour expression : $f'(x) = \dfrac{x^2+2{\cdot}x}{(x+1)^2}$

2. On considère les droites (d) et (Δ) tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses respectives $-\frac{1}{2}$ et 1.

   a. Déterminer les équations réduites des tangentes (d) et (Δ).

   b. Tracer les droites (d) et (Δ).

Exercice 4699

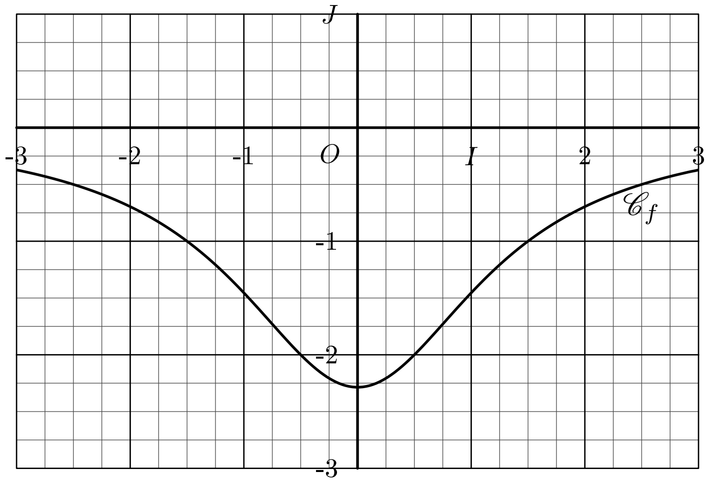
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{-16}{4{\cdot}x^2+7}$$

1. Etablir que la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :
$$f'(x) = \frac{128{\cdot}x}{\left(4{\cdot}x^2+7\right)^2}$$

2. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$.

3. Dans, le repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, est représentée la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f. Tracer la représentation graphique de (T).

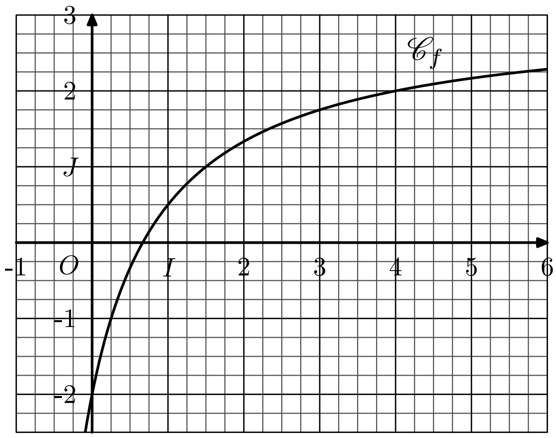


Exercice 4830

On considère la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ et dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$$

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



On note (d) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

1. Déterminer l'équation réduite de la droite (d).

2. Tracer la tangente (d) dans le repère $(O\,;I\,;J)$.

Exercice 4719

On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ et on considère la fonction h définie par :

$$h(x) = \frac{3{\cdot}x^2 - x + 2}{x+1}$$

On note $\mathscr{C}_h$ sa courbe représentative dans le plan.

1. Déterminer l'équation de la tangente (Δ) à la courbe $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse 2.

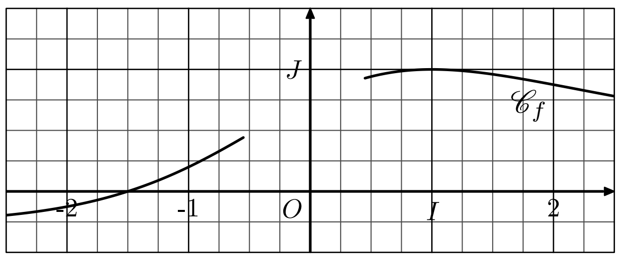
2. Vérifier vos résultats à l'aide de la calculatrice

Exercice 6665

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{2{\cdot}x+3}{x^2+4}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O\,;I\,;J)$. Ci-dessous est représentée une partie de la courbe $\mathscr{C}_f$.



1. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 et effectuer son tracé dans le repère ci-dessus. *(on indiquera les coordonnées des deux points utilisés pour le tracé de la tangente).*

2. Déterminer le ou les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ où celle-ci admet une tangente horizontale.

11. Quotients : tangentes et points d'intersection :

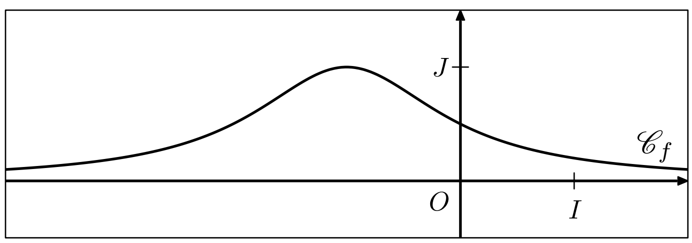
(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 6617

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{x^2+2{\cdot}x+2}$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f est donnée dans le repère $(O\,;\,I\,;\,J)$ orthonormé ci-dessous :



Soit (Δ) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

1. a. Etablir que la fonction dérivée de la fonction f admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{-2{\cdot}x-2}{\left(x^2+2{\cdot}x+2\right)^2}$$

   b. Etablir que l'équation réduite de la droite (Δ) admet pour expression :

$$y = -\frac{1}{2}{\cdot}x + \frac{1}{2}.$$

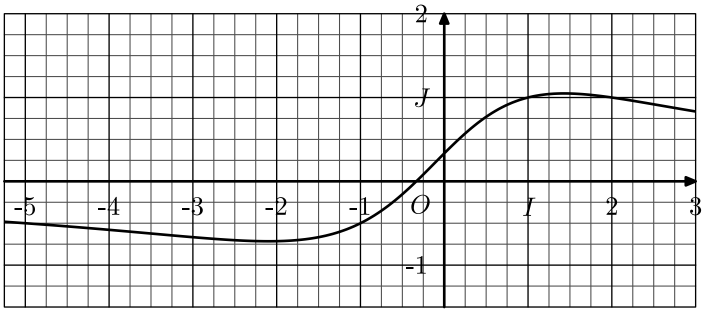
2. Etudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite (Δ).

Exercice 4709

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{3{\cdot}x+1}{x^2+3}$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

2. a. Déterminer le nombre dérivée de la fonction f en 1.

   b. En déduire l'équation de la tangente (d) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

   c. Effectuer le tracé de la droite (d).

3. a. Déterminer la valeur des réels a, b et c réalisant l'identité suivante :
   $$x^3+3{\cdot}x^2-9{\cdot}x+5=(x-1)(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c)$$

   b. En déduire la forme factorisé du polynôme :
   $$x^3+3{\cdot}x^2-9{\cdot}x+5.$$

   c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation :
   $$f(x)=\frac{1}{4}{\cdot}x+\frac{3}{4}$$

4. Donner l'ensemble des coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la tangente (d).

12. Quotients : variations :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 2326

On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :
$$f(x)=\frac{x^2-x+3}{2x^2-2x+3}$$

1. Montrer que le dénominateur ne s'annule jamais.

Ainsi, la fonction f est définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

2. Etablir que la fonction dérivée f' de la fonction f admet pour expression :
   $$f'(x)=\frac{-6x+3}{\left(2x^2-2x+3\right)^2}$$

3. a. Dresser le tableau de signes de f' sur $\mathbb{R}$..

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   On admettra les deux limites suivantes :
   $$\lim_{h\mapsto-\infty} f(x)=\frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{h\mapsto+\infty} f(x)=\frac{1}{2}$$

4. En déduire les extrémums de la fonction f.

Exercice 2964

On considère la fonction f définie par la relation :
$$f(x)=\frac{3x^2-2x-2}{2x^2+x+1}$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. a. Etablir que la fonction dérivée f' admet l'expression suivante :
   $$f'(x)=\frac{7x^2+14x}{\left(2x^2+x+1\right)^2}$$

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   On admet les deux limites suivantes :
   $$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)=\frac{3}{2} \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=\frac{3}{2}$$

3. En déduire que la fonction f admet pour minorant le nombre -2 et pour majorant le nombre 2.

Exercice 5278

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$$f(x)=\frac{3x-4}{x^2+1}$$

1. a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f'.

   b. Dresser le tableau de signes de la fonction f'.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   On admettra les deux limites suivantes :
   $$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)=0 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=0$$

3. La fonction f admet-elle des extrémums ? Si oui, préciser leurs caractéristiques.

13. Quotients : modélisation problèmes économique :

Exercice 379

Un supermaché souhaite acheter des fruits à un fournisseur. Ce fournisseur propose des prix au kilogramme, dégressifs en fonction du poids de fruits commandé.
Pour une commande de x kilogrammes de fruit, le prix $P(x)$ en euros du kilogramme de fruits est donné par la formule :
$$P(x)=\frac{x+300}{x+100} \quad \text{pour } x\in\big[100\,;+\infty\big[.$$

Par exemple si le supermaché achète 300 kilogrammes de fruits, ces fruits lui sont vendus :
$$P(300)=\frac{600}{400}=1{,}50 \text{ euros le kilogramme.}$$

Dans ce cas, le supermaché devra payer $300\times1{,}5=450$ euros au fournisseur pour cette commande.

Partie A : Etude du prix P proposé par le fournisseur.

1. Montrer que : $P'(x)=\dfrac{-200}{(x+100)^2}$ sur $\big[100\,;+\infty\big[$.

2. Donner le sens de variations de la fonction P sur $[100\,;+\infty[$.

Partie B : Etude de la somme S à dépenser par le supermarché.

On appelle $S(x)$ la somme en euros à dépenser par le supermarché pour une commande de x kilogrammes de fruits *(ces fruits vendus par le fournisseur au prix de $P(x)$ euros par kilogramme)*.
Cette somme est donc égale à :
$S(x)=x\cdot P(x)$ pour $x\in[100\,;+\infty[$.

1. Montrer que pour tout x appartenant à $[100\,;+\infty[$:
$$S'(x)=\frac{x^2+200\cdot x+30\,000}{(x+100)^2}$$

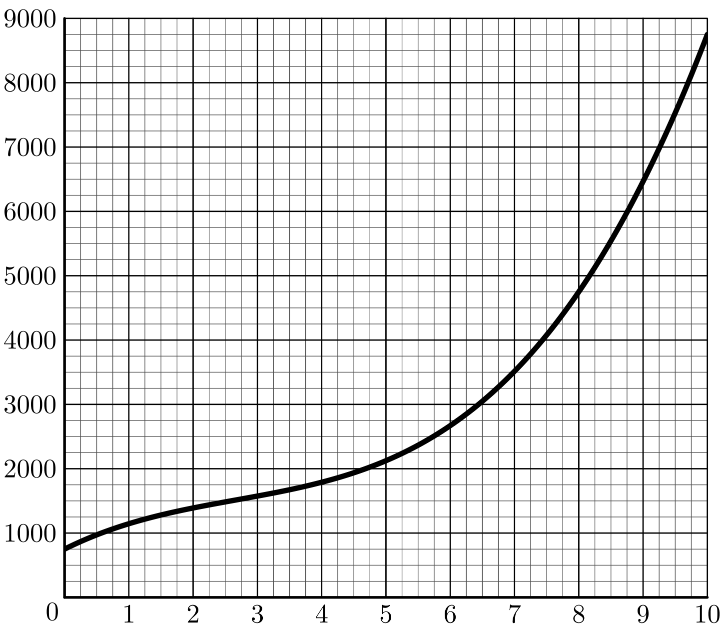
2. Montrer que pour tout x appartenant à $[100\,;+\infty[$:
$$S(x)=x+200-20\,000\times\frac{1}{x+100}$$

Exercice 4885

L'entreprise CoTon produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en 1 mètre de large et pour une longueur x exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.

Le coût total de production en euros de l'entreprise CoTon est donné en fonction de la longueur x par la formule :
$C(x)=15x^3-120x^2+500x+750$.

Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique de la fonction C.



Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A : Etude du bénéfice

Si le marché offre un prix p en euros pour un kilomètre de ce tissu, alors la recette de l'entreprise CoTon pour la vente d'une quantité x est égal à $R(x)=p\cdot x$.

1. Tracer sur le graphique la droite D_1 d'équation :
$y=400\cdot x$.
Expliquer, au vu de ce tracé, pourquoi l'entreprise CoTon ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix p du marché est égal à 400 euros.

2. Dans cette question on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros.

a. Tracer sur le graphique la droite D_2 d'équation :
$y=680\cdot x$.
Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise CoTon réalise un bénéfice si le prix p du marché est de 680 euros.

b. On considère la fonction B définie sur l'intervalle $[0\,;10[$ par :
$B(x)=680\cdot x-C(x)$
Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;10]$, on a :
$B'(x)=-45\cdot x^2+240\cdot x+180$

c. Etudier les variations de la fonction B sur $[0\,;10]$.
En déduire pour quelle quantité produite et vendue le bénéfice réalisé par l'entreprise CoTon est maximum.
Donner la valeur de ce bénéficec.

Partie B : étude du coût moyen

On rappelle que le coût moyen de production C_M mesure le coût par unité produite. On considère la fonction C_M définie sur l'intervalle $]0\,;10]$ par :
$$C_M(x)=\frac{C(x)}{x}$$

1. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;10]$, on a :
$$C'_M(x)=\frac{30\cdot(x-5)(x^2+x+5)}{x^2}$$

2. a. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;10]$, $C'_M(x)$ est du signe de $(x-5)$.
En déduire les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $]0\,;10]$.

b. Pour quelle quantité de tissu produite le coût moyen de production est-il minimum?
Que valent dans ce cas le coût moyen de production et le coût total?

Exercice 4773

Partie A

1. Le prix d'un article est de 120 euros. Ce prix subit une première évolution au taux de 25 %, puis une seconde évolution qui le ramène à sa valeur initiale. Quel est le taux de la deuxième évolution?

2. Le prix d'un article est de 120 euros. Ce prix subit une première évolution au taux de $-20\,\%$, puis une seconde évolution qui le ramène à sa valeur initiale. Quel est le taux de la deuxième évolution?

Partie B

D'une façon générale, un prix P subit deux évolution successibes, la première à un taux de x, et la deuxième à un taux de y. Il revient alors à sa valeur initiale P.

1. Montrer que x et y vérifient : $(1+x)(1+y)=1$.

On admet alors que : $y=\dfrac{-x}{1+x}$

2. On veut étudier sur l'intervalle $[-0{,}5\,;2]$ la fonction f telle que :
$f(x)=\dfrac{-x}{1+x}$.
Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

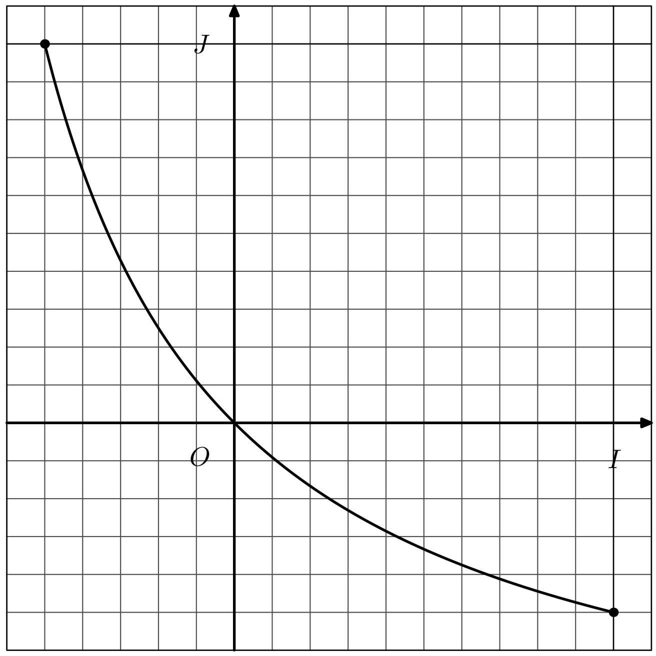
a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.

b. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[-0{,}5\,;2\right]$ et dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

3. A l'aide de la représentation graphique de la courbe $\mathscr{C}$ donnée en annexe, ou à l'aide d'un calcul, répondre aux questions suivantes :

a. Quelle évolution faut-il faire subir à un prix augmenté de 50 % pour retrouver le prix initial?

b. Quelle évolution faut-il faire subir à un prix diminué de 50 % pour retrouver le prix initial?



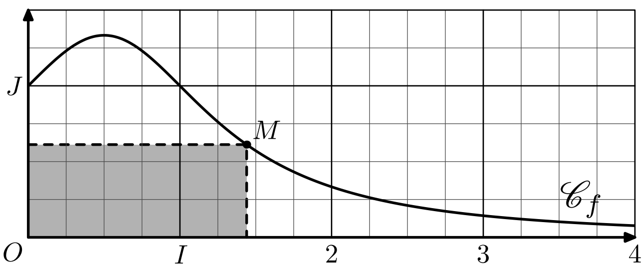
14. Quotients : modélisation et fonctions : *(+1 exercice pour les enseignants)*

Exercice 5244

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



On considère un point M de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et le rectangle représenté ci-dessus où :

- les points O et M en sont deux sommets opposés.
- ses côtés sont parallèles aux axes du repère.

On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire de ce rectangle en fonction de la valeur de x.

1. Donner l'expression de la fonction $\mathcal{A}$.

2. a. Montrer que la fonction $\mathcal{A}'$ dérivée de la fonction $\mathcal{A}$ admet pour expression :

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{(1+x)(1-x)}{\left(x^2 - x + 1\right)^2}$$

b. Dresser le tableau de signes de la fonction $\mathcal{A}'$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$.

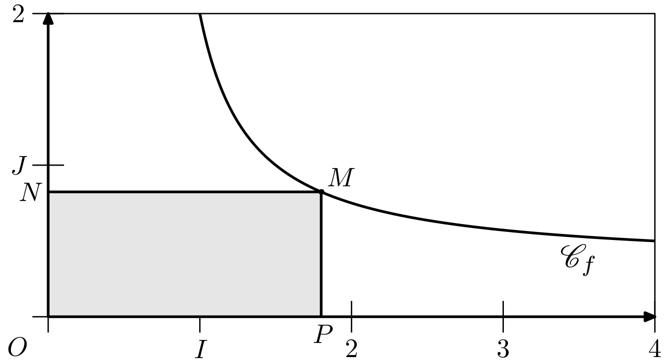
3. Justifier que l'aire du rectangle est maximale lorsque le point M a pour abscisse 1.

Exercice 2828

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x+1}{3x-2}$$

La représenation $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous :



On considère un point M appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$ et le rectangle $MNOP$ construit à partir du point O et M et dont les côtés sont parallèles aux axes.

On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du rectangle $MNOP$ où x est l'abscisse du point M. Le but de l'exercice est de déterminer pour quelles valeurs de x, l'aire $\mathcal{A}(x)$ est minimale.

1. Donner l'expression de $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x.

2. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de $\mathcal{A}$.

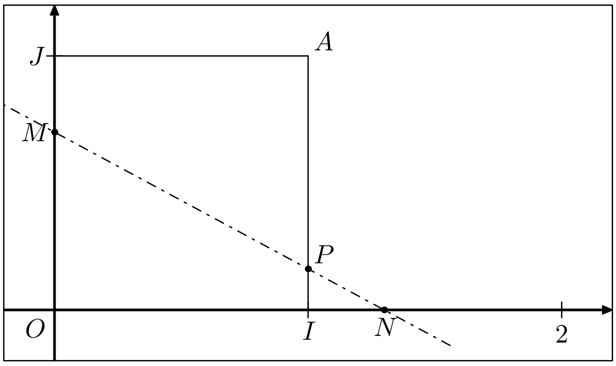
3. Etablir le sens de variation de la fonction $\mathcal{A}$.

4. En déduire la position du point M afin que l'aire du rectangle $MNOP$ soit minimale.

15. Modélisation : plus loin :

Exercice 6667

On considère la plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé représenté ci-dessous :



Le point A a pour coordonnées $A(1\,;1)$.

Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$, on considère les deux points M et N définis par :

- $M\in[OJ]$; $JM=x$
- $N\in[OI)$; $N\notin[OI]$; $IN=x$

Le point P est définit par l'intersection des droites (MN) et (AI).

Déterminer la valeur de x afin que l'ordonnée du point P soit maximale.

16. Composée par une fonction affine :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 2826

Proposition :
Soit f une fonction dérivable sur I, a et b deux nombres réels quelconque. La fonction définit par :
$x\longmapsto f(a{\cdot}x{+}b)$
est une fonction dérivable sur tout intervalle J tel que :
$x\in J \implies ax{+}b\in J$
et sa fonction dérivée a pour expression :
$x\longmapsto a{\cdot}f'(a{\cdot}x{+}b)$

Déterminer, pour chaque fonction, l'expression de la fonction dérivée :

a. $f : x\longmapsto (4x-2)^7$ b. $g : x\longmapsto \dfrac{1}{5-3x}$

Exercice 2841

Déterminer l'expression, sous la forme d'un quotient simplifié, de la fonction f' *(resp. g')* dérivée de la fonction f *(resp. g)* :

a. $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{3}x-2}$ b. $g(x)=\sqrt{3x-1}$

17. Composée par une fonction affine : tangente et variation :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 3510

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f(x)=\Big(\dfrac{1}{2}{\cdot}x+1\Big)^4$

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f au point d'abscisse 2.

Exercice 2325

On considere deux fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $\Big[\dfrac{5}{3}\,;+\infty\Big[$ par :

$f(x)=2\big(3-2x\big)^5$; $g(x)=\sqrt{3x-5}$

1. Déterminer l'expression des fonctions dérivées f' et g' associées aux fonctions f et g.
2. a. Déterminer le signe des fonctions f' et g' sur leur ensemble de dérivation.
   b. Dresser le tableau de variations de chacune de ces fonctions.

18. Composée par une fonction affine :produit et quotient :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 119

Déterminer l'expression de la fonction dérivée pour chacune des fonctions ci-dessous :

a. $f\colon x\longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$ b. $g\colon x\longmapsto(2x+1){\cdot}\sqrt{3x-1}$

Exercice 8401

On considère la fonction f définie sur $\left[-\dfrac{1}{4}\,;+\infty\right[$ par :

$f : x \longmapsto (3-2x)^3 \cdot \sqrt{4x+1}$

On donnera l'expression de f' sous la forme $\dfrac{P(x)}{\sqrt{4x+1}}$ où $P(x)$ est un polynôme ayant $(3-2x)^2$ pour facteur

19. Composée par une fonction affine : produit, quotient, tangente et variations :

(+1 exercice p

Exercice 2521

On considère la fonction f dont l'image de x, pour $x \in [1\,;+\infty[$, est définie par la relation :

$$f(x) = (x^2-4x+3)\sqrt{2x-2}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la valeur du nombre dérivée de la fonction f en 3.
2. Déterminer l'expression de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.

Exercice 2348

Soit f la fonction définie par la relation :

$$f : x \longmapsto (x+5)\sqrt{1-2x}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de f.
3. Dresser le tableau de signes de f'.
4. En déduire le tableau de variations de la fonction f
5. Justifier que f admet un extrémum global en $-\dfrac{4}{3}$

255. Exercices non-classés :

(+5 exercices pour les enseignants)

Exercice 7085

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto x^5 \cdot (x^2-1)$
2. $g : x \longmapsto \dfrac{x^2-3x}{2x-4}$

Exercice 7044

Les antibiotiques sont des molécules possédant la propriété de tuer des bactéries ou d'en limiter la propagation.
Le tableau ci-dessous donne la concentration dans le sang en fonction du temps d'un antibiotique injecté en une seule prise à un patient.

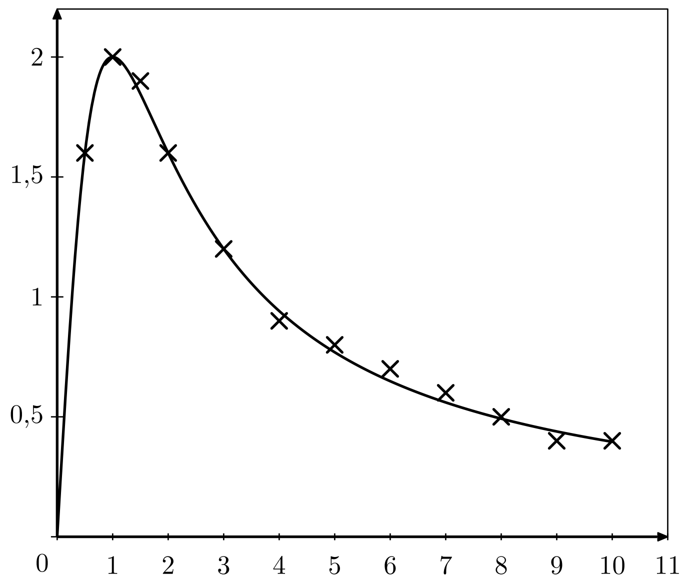
Temps en heure	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Concentration en $^{mg}/_{\ell}$	1,6	2	1,9	1,6	1,2	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,4

Ces données conduisent à la modélisation de la concentration en fonction du temps par la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$$g(t) = \frac{4 \cdot t}{t^2+1}$$

Lorsque t représente le temps écoulé, en heures, depuis l'injection de l'antibiotique, $g(t)$ représente la concentration en $^{mg}/_{\ell}$ de l'antibiotique.

Le graphique ci-dessous représente les données du tableau et la courbe représentative de la fonction g.



1. Par lecture graphique, donner sans justification :
   a. les variations de la fonction g sur $[0\,;10]$;
   b. la concentration maximale d'antibiotique lors des 10 premières heures ;
   c. l'intervalle de temps pendant lequel la concentration de l'antibiotique dans le sang est supérieure à $1{,}2\,^{mg}/_{\ell}$.
2. a. La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0\,;10]$ et sa dérivée est g'.

   Montrer que : $\quad g'(t) = \dfrac{4 \cdot (1-t^2)}{(t^2+1)^2}$

   b. En utilisant l'expression de $g'(t)$, montrer que la concentration maximale serait, avec cette modélisation, atteinte exactement 1 heure après l'injection.

Exercice 7296

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x)=\frac{4-3\cdot x}{x^2+1}$$

A l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats ci-dessous qui pourront être utilisés sans être démontrés :

L1	f(x):=(4-3*x)/(x^2+1) $f(x)=\dfrac{4-3x}{x^2+1}$
L2	g(x):=Dérivée[f(x)] $g(x)=\dfrac{3x^2-8x-3}{\left(x^2+1\right)^2}$
L3	Résoudre[f(x)=0] $\left\{x=\frac{4}{3}\right\}$
L4	Résoudre[g(x)=0] $\left\{x=-\frac{1}{3}\quad;\quad x=3\right\}$

1. Dresser le tableau de signes de la fonction f'.

2. Donner l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)>0$.

