Première Spécialité/Etude de suites

1. Variations des premiers termes de suites arithmétiques et géométriques : (+1 exercice pour les

Exercice 6015

On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme 5 et de raison 2.

1. Donner les quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. Exprimer la valeur du terme u_n en fonction de son rang n.
3. Quelle conjecture peut-on émettre quant à la variation des termes de la suite (u_n)?

Exercice 6653

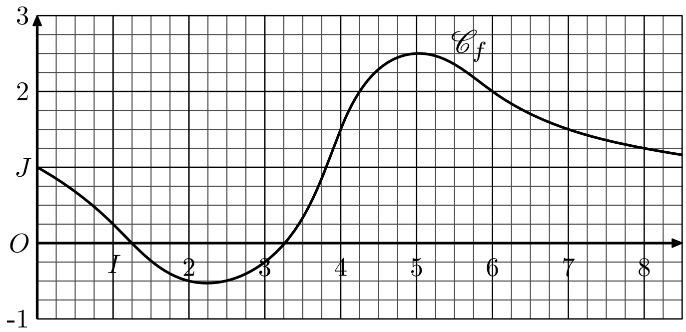
Dans chaque cas, préciser, si possible, le sens de variation des suites :

1. (u_n) est une suite arithmétique dont le premier terme est positif et la raison négative.
2. (v_n) est une suite géométrique dont le premier terme est négatif et la raison est strictement supérieure à 1.
3. (w_n) est une suite géométrique dont le premier terme est positif et la raison est négative.

2. Variations des premiers termes d'une suite définie explicitement : (+1 exercice pour les enseigna

Exercice 5089

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée dans le repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous :



On définit la suite (u_n) par la relation :

$u_n = f(n)$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}$.

1. Justifier que le terme u_4 a pour valeur $\dfrac{3}{2}$.
2. a. Déterminer la valeur des termes :
   u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 ; u_5 ; u_6

   b. Dire si les affirmations ci-dessous sont exacts ou non :
   - "*Les termes de la suite* (u_n) *pour* $i\in\{0\,;1\,;2\}$ *sont ordonnés dans l'ordre décroissant.*"
   - "*Les termes de la suite* (u_n) *pour* $i\in\{3\,;4\,;5\}$ *sont ordonnés dans l'ordre croissant.*"

Exercice 1585

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$:

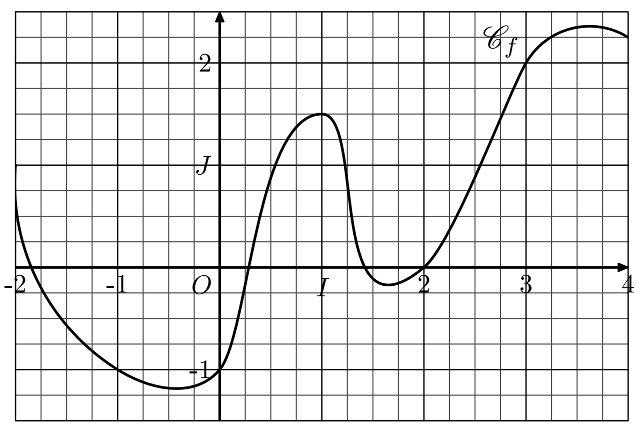
$$u_n = 2{\cdot}n^2 - n + 1 \quad ; \quad v_n = \frac{4-n}{1+n}$$

1. Déterminer les 5 premiers termes des ces deux suites.
2. Conjecturer le sens de variations de la suite (u_n) et (v_n).

3. Variations des premiers termes d'une suite définie par récurrence : (+1 exercice pour les enseign

Exercice 2378

On considère la fonction f définie sur $[-2\,;4]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous :



On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Compléter le tableau suivant avec les premiers termes de la suite (u_n) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n										

2. Pour chacune des affirmations ci-dessous, préciser si elles sont vraies ou fausses :
   - “*la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.*”
   - “*la suite (u_n) est constante à partir du rang 3.*”

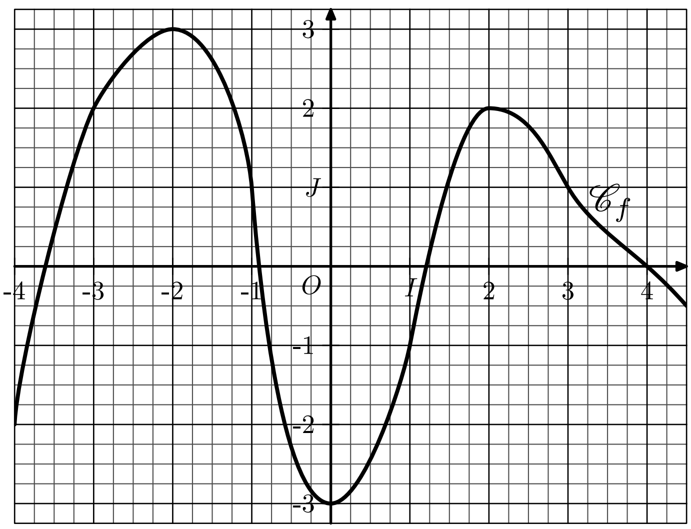
Exercice 8478

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ par :
$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot u_n - \frac{1}{4}$$
   a. Déterminer les 4 premiers termes de la suite (u_n).
   b. Conjecturer la variation de la suite (u_n)
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ par :
$$v_0 = -1 \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot v_n - \frac{1}{4}$$
   a. Justifier les comparaisons : $v_0 < v_1 < v_2 < v_3$
   b. Conjecturer la variation de la suite (v_n)

4. Variations : cas des suites constantes ou périodiques :

Exercice 2978

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on considère la représentation $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$:



1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ définie par :
$$u_0 = 4 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n)$$
   a. Déterminer la valeur des 6 premiers termes de la suite (u_n).
   b. Déterminer la valeur du terme u_{100}.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ définie par :
$$v_0 = -2 \quad ; \quad v_{n+1} = f(v_n)$$
Déterminer la valeur du terme v_{100}.

Exercice 2953

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1-u_n}{1+u_n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n).
2. Montrer qu'on a la relation suivante :
$$u_{n+2} = u_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
3. Que peut-on dire des termes de cette suite?
4. On admet que le terme de rang n de la suite (u_n) admet une expression de la forme :
$$u_n = a\cdot\big[1-(-1)^n\big]+b \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
où a et b sont deux nombres réels $(a,b\in\mathbb{R})$.
Determiner les valeurs de a et de b.

5. Variations : suites explicites :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 2386

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme de rang n est donné par la formule :

$$u_n = n^2 - 7\cdot n + 1$$

1. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n											

2. Après avoir donner le tableau de variations de la fonction f dont l'image de x est définie par :
$$f(x) = x^2 - 7\cdot x + 1$$
Etablir que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 4.

Exercice 2382

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :
$$u_n = \frac{2{\cdot}n^2+1}{2{\cdot}n+5} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
On considère la fonction f définie par la relation :
$$f(x) = \frac{2{\cdot}x^2+1}{2{\cdot}x+5}$$

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
2. Etablir que la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression sur $\mathcal{D}_f$:
$$f'(x) = \frac{4{\cdot}x^2+20{\cdot}x-2}{(2{\cdot}x+5)^2}$$
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Justifier que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1.
5. Peut-on dire que la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$?

6. Variations : quotient de termes consécutifs :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 8494

1. Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme 2 et de raison 4. Justifier que la suite (u_n) est croissante.
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ et dont le terme de rang n admet l'expression :
$v_n = 3\times 0{,}2^n$
Justifier que la suite (v_n) est décroissante.

Exercice 2381

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$u_n = \frac{3^n}{4} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$
Montrer que (u_n) est strictement croissante.

Exercice 2522

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ par : $u_n = \dfrac{5^n}{n+2}$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante sur $\mathbb{N}$.

7. Variations à partir d'un rang : quotient de termes consécutifs :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 2450

On consière la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par la formule explicite :
$$u_n = \frac{1{,}2^n}{n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*.$$

1. Donner l'expression simplifiée de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
2. Montrer que (u_n) est croissante à partir du rang 5.

Exercice 2670

Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie par la relation :
$$u_n = n\times(0{,}4)^n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

Exercice 8490

On consière la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par la formule explicite :
$$u_n = \frac{1{,}2^n}{n^2} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*.$$

1. Etablir l'identité suivante pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{n^2-10{\cdot}n-5}{5{\cdot}(n+1)^2}$$
2. En déduire que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 11.

8. Variations : différence de termes consécutifs :

(+5 exercices pour les enseignants)

Exercice 8495

1. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 3. Justifier que la suite (u_n) est un suite croissante sur $\mathbb{N}$.
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ et dont le terme de rang n admet l'expression :
$v_n = 4-n$
Justifier que la suite (v_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

Exercice 2380

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :
$$u_n = -32n+102 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
Montrer que cette suite est décroissante.

Exercice 8483

La suite (u_n) est définie par la formule explicite :
$$u_n = \frac{5+n}{n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$
Déterminer le sens de variations de la suite (u_n).

Exercice 8497

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :

$$w_n = 2n - \frac{25}{n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

Montrer que la suite (w_n) est croissante.

Exercice 8481

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation explicite :

$$u_n = n^3 - 2n^2 - 3n$$

1. Donner l'expression réduite de : $u_{n+1}-u_n$.
2. En déduire que la suite (u_n) est croissante pour n supérieur à 2.

Exercice 3401

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{n^2+10}{2\cdot n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

Justifier que (u_n) est croissante à partir du rang 3.

9. Lien entre formule récurrente et formule explicite :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 2383

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme de rang n est définie par la relation de récurrence :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}\cdot u_n + 1 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

Calculer les 4 premiers termes de la suite (u_n).

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie explicitement par :

$$v_n = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}$$

a. Calculer les 4 premiers termes de la suite (v_n)

b. Etablir que pour tout entier naturel n, on a :

$$v_{n+1} - \frac{1}{3}\cdot v_n = 1$$

3. En déduire l'égalité des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 2384

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la suite définie par la relation de récurrence et la condition initiale :

$$u_1 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{u_n}} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

Calculer les 4 premiers termes de la suite.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme de rang n a pour valeur : $v_n = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

a. Donner la valeur de v_1.

b. Etablir l'identité suivante pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$1 + \frac{1}{v_n} = n+1$$

c. En déduire que la suite (v_n) suit la relation de récurrence ci-dessous pour tout entier naturel non-nul :

$$v_{n+1} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{v_n}}$$

3. Que pouvez-vous dire des suites (u_n) et (v_n)?

10. Notions de limites : suites définies explicites :

(+1 exercice pour les enseignants)

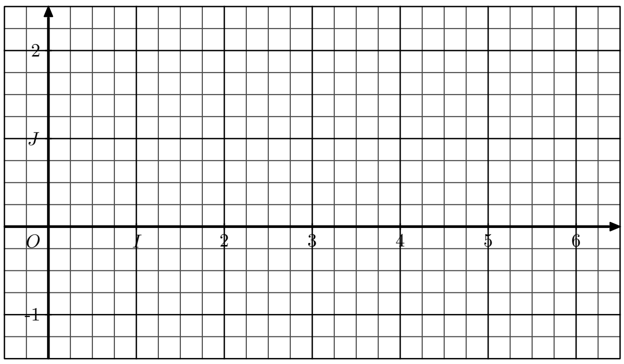
Exercice 8502

On considère la suite (u_n) dont les termes sont éfinie pour tout entier naturel n par la relation : $u_n = \dfrac{10\cdot n-1}{5\cdot n+1}$

1. a. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeurs ci-dessous avec des valeurs arrondies au centième près :

n	0	1	2	3	4	5
u_n						

b. Dans le repère ci-dessous et pour n , placer la suite des points (A_n) dont les coordonnées sont définies par : $A_n(n\,;u_n)$



2. a. A l'aide de la calculatrice, observer la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{10\cdot x - 1}{5\cdot x + 1}$$

b. Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 8504

A l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de chacun des suites définies ci-dessous lorsque n tend vers $+\infty$:

- la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ par : $u_n = \dfrac{4\cdot n}{1+12\cdot n}$
- la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ par : $v_n = n^2+2\cdot n-3$
- la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ par : $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

11. Notions de limites : somme des termes d'une suite :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 6029

On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme 5 et de raison $\dfrac{2}{3}$.

On note S_n la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite (u_n) : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n$

1. Justifier que la suite (S_n) est croissante.
2. Donner l'expression du terme S_n en fonction de n.
3. a. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous en arrondissant les valeurs au millième près :

n	0	1	2	10	20	24
S_n						

   b. Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

   c. Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite des termes de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 6013

Un coureur se lance un défi : il souhaite faire le tour de l'Europe.
Le premier jour, il parcourt $50\,km$. Par la fatigue, de jour en jour, sa distance parcourue quotidiennement se réduit de $1\,\%$.

On note u_n la longueur parcourue par le coureur le n-ième jour. En supposant ue le coureur poursuit indéfiniment sa course, on obtient une suite (u_n) définie pour tout entier naturel non-nul.

1. Déterminer la valeur des quatre permiers termes de la suite (u_n).
2. a. Quelle est la nature de la suite (u_n)? Donner les élèments caractéristiques de la suite (u_n).

   b. Exprimer le terme u_n en fonction du rang n.

   c. Quelle distance sera parcourue par le coureur le 100^e jour? On arrondira la valeur au dixième de kilomètre.
3. Pour tout entier naturel n, on note S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n) : $S_n = u_1+u_2+\cdots+u_n$

   a. Exprimer la somme S_n en fonction du rang n.

   b. Compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs au dixième de kilomètres :

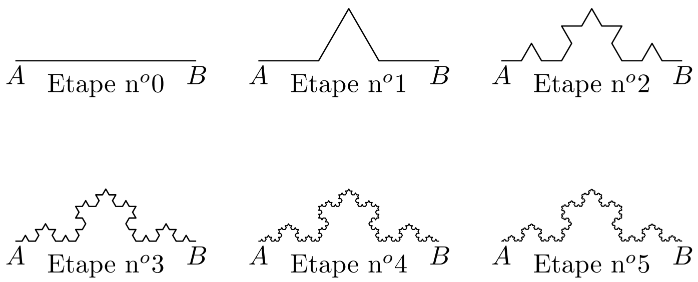
n	10	100	500	750	1000
u_n					

Exercice 6014

On construit le flocon de Heige Von Koch de la manière suivante :

- On part d'un segment $[AB]$ de longueur $9\,cm$.
- Pour passer d'une étape à la suivante, on découpe chaque segment de la figure en trois parties égales et on remplace le segment "*central*" par un triangle équilatéral.

Voici la représentation des 6 premières étapes de cette construction :



A chaque étape n, on note u_n la longueur de la "*ligne brisée*" ainsi obtenue. On construit ainsi une suite de nombres (u_n) définie pour tout entier naturel n.

1. Déterminer la mesure des trois premiers termes de la suite (u_n).
2. a. A l'étape n, exprimer le nombre de segments s_n formant la "*ligne brisée*" en fonction de n.

   b. A l'étape n, exprimer la longueur ℓ_n de chacun des segments formant la "*ligne brisée*" en fonction de n.
3. On note L_n la longueur de la "*ligne brisée*" à l'étape n. On obtient ainsi une suite (L_n) de termes numériques définie pour tout entier naturel n.

   a. Exprimer les termes de la suite (L_n) en fonction de leur rang n.

   b. Compléter le tableau ci-dessous en arrondissant les valeurs au centième de centimètre près :

n	0	1	10	20	30
L_n					

12. Approfondissement : suite définies conjointements :

Exercice 8498

On considère les deux suites $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ définies pour tout entier naturel n par les relations :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ v_0 = 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2\cdot u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3\cdot v_n}{3} \end{cases}$$

1. Déterminer les trois premiers termes des suites $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$.
2. On admet que les termes des suites $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ sont des nombres strictement positif.
   Montrer que les suites $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ sont croissantes sur $\mathbb{N}$.

13. Approfondissement : utilisation d'une suite auxiliaire :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 5368

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par :

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{3}{4}\cdot u_n + \frac{1}{2} \qquad \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}$$

1. On considère la suite $\left(v_n\right)$ définie par la relation suivante pour tout entier naturel n :

$$v_n = \frac{1}{2}\cdot u_n - 1$$

   a. Etablir l'égalité ci-dessous pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = \frac{3}{4}\cdot v_n$$

   b. Donner le sens de variation de la suite $\left(v_n\right)$.
2. En déduire le sens de variation de la suite $\left(u_n\right)$.

255. Exercices non-classés :

Exercice 5973

1. a. On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par la relation :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

   Déterminer les quatre premiers termes de la suite $\left(u_n\right)$.

   b. On considère la suite $\left(v_n\right)$ définie par la relation :

$$v_n = \frac{n}{n+1} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

   Déterminer les quatre premiers termes de la suite $\left(v_n\right)$.

   c. Quelle conjecture peut-on faire à propos des suites $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$?
2. a. Simplifier l'expression suivante : $v_{n+1}\cdot\left(2 - v_n\right)$

   b. Justifier que les deux suites $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ sont égales.

