Geogebra

Logiciel de géométrie dynamique

Tutorial

Table des matières

I. Introduction :

A. Présentation :

Geogebra est un logiciel de dessin dynamique : il permet de construire des figures géométriques en plaçant des points et en construisant de nouveaux objets géométriques relativement aux objets déjà présents.
Le déplacement d'un point "*libre*" de la figure entraîne la modification de tous les objets liés à celui-ci mais en conservant les propriétés définissant ces objets.

Geogebra est un logiciel du domaine libre ; ceci signifie qu'il est accessible gratuitement et qu'il peut être utilisé dans des utilisations aussi bien personnelles que professionnelles.

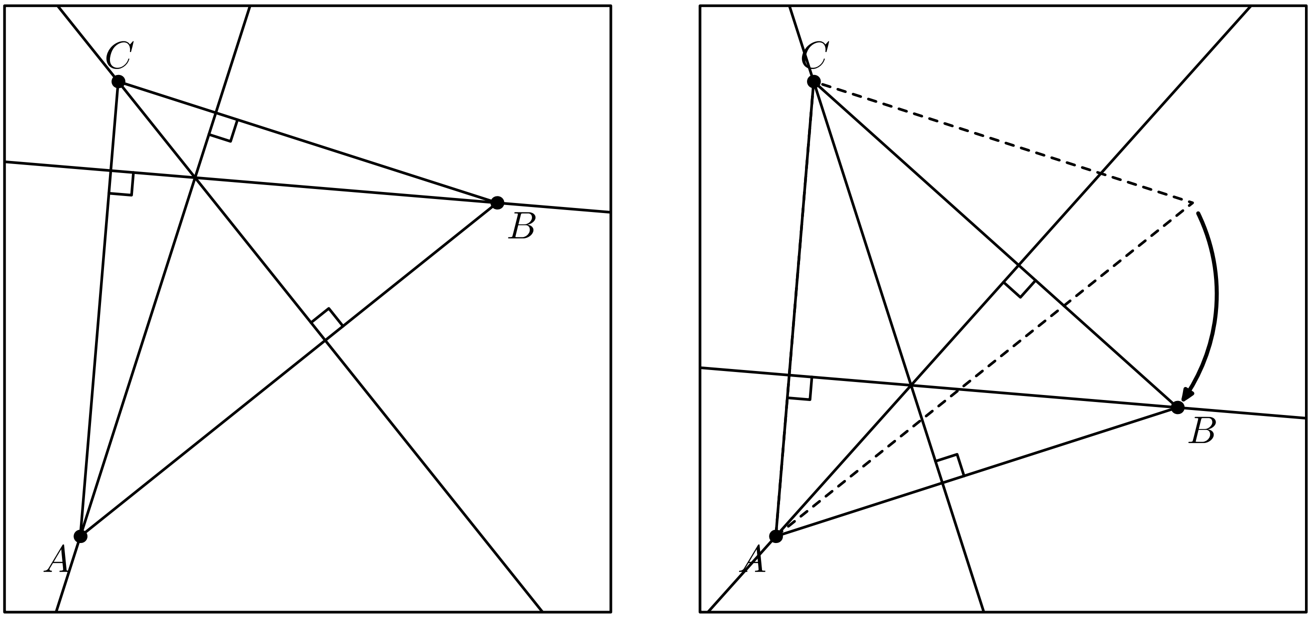


Fig. 1.a Fig. 1.b

- La figure 1.a présente le tracé d'un triangle ABC quelconque et des ses trois hauteurs : on peut observer la concourance de ses trois hauteurs.
- La figure 1.b présente le déplacement du point B : le triangle ABC est automatiquement retracé et les objets "*hauteurs*" sont également déplacées et gardent leurs définitions relativement au nouveau triangle ABC et leurs sommets respectifs.

Cette modification de la figure permet de mettre en évidence la persistance de la propriété "*les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes*" quel que soit le triangle ABC.

Geogebra permet également l'utilisation d'un repère et permet d'effectuer des taches de géométrie analytique : calcul sur les coordonnées des points et du calcul vectoriel.
Geogebra associe à tous points et à tous vecteurs un ses coordonnées *(un couple de nombres)* et y autorise certaines opérations *(par ailleurs interdite en mathématiques)* :

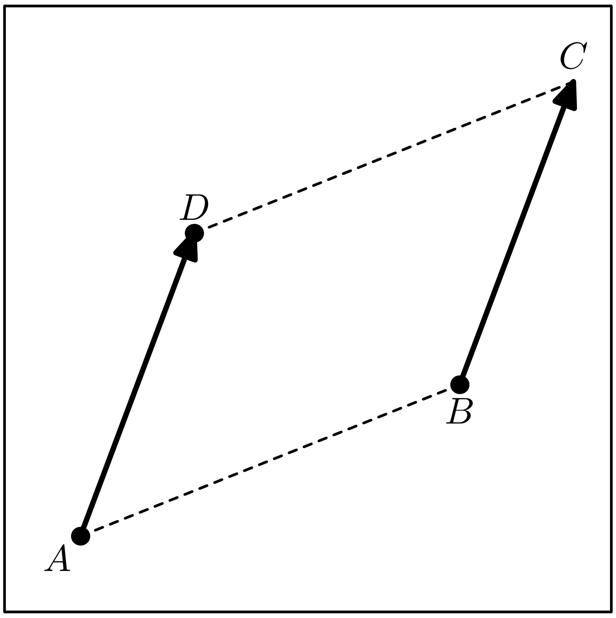


Fig. 2.a

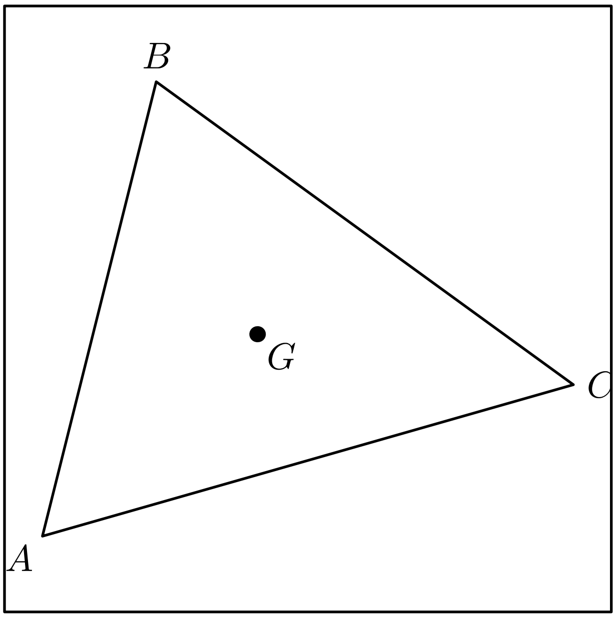


Fig. 2.b

- La figure 2.a présente trois points A, B et D. Le point C, tel que $ABCD$ soit un parallélogramme, est défini par la formule `C=B+(D-A)`
- Dans la figure de droite, la formule `G=(2/3)*((1/2)*(A+B))+(1/3)*C` permet d'obtenir très rapidement le centre de gravité du triangle ABC.

Geogebra permet également de tracer les courbes représentatives de fonctions et de l'utiliser comme un objet géométrique :

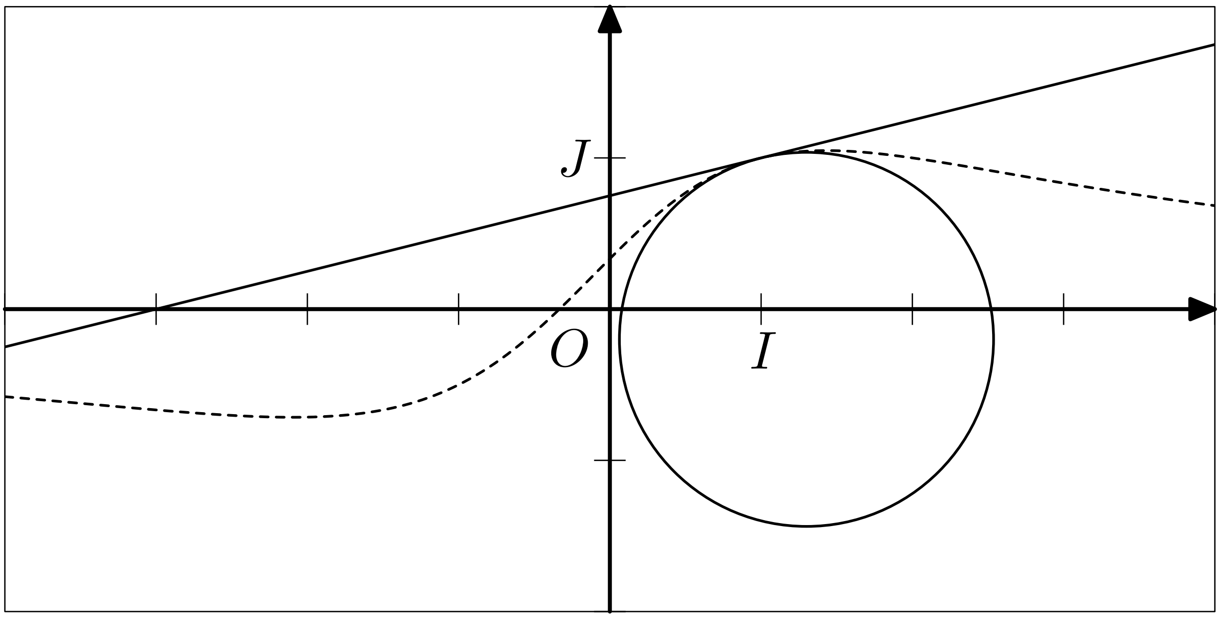


Fig. 3

- La courbe tracée, Geogebra trace facilement la tangente à cette courbe en un point ; en utilisant la tangente, on peut placer un cercle "tangent" à la courbe.
  En déplaçant le point de contact de la tangente, on peut faire "*rouler*" le cercle sur la courbe ; illustrant le côté "*dynamique*" de ce logiciel.

Geogebra possède également une fonctionnalité de feuille de calculs permettant de représenter aussi bien des suites numériques que des suites complexes :

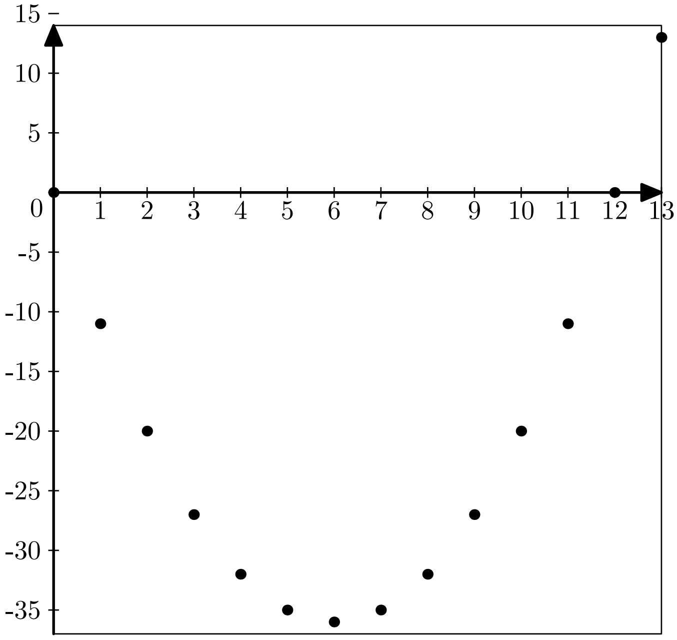


Fig. 4.a

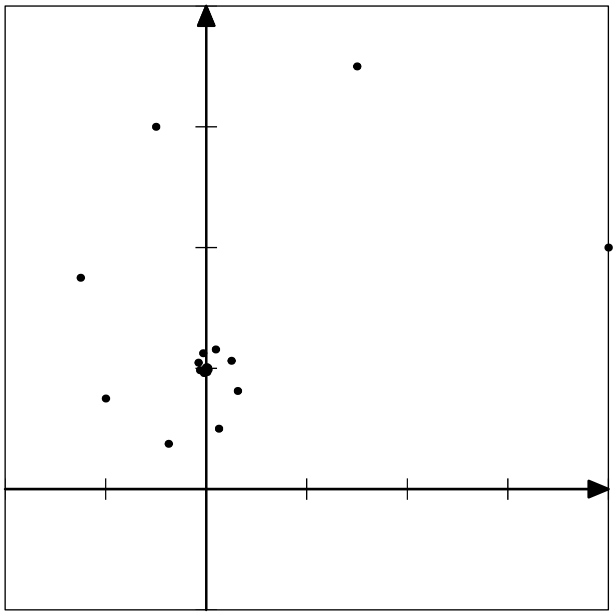
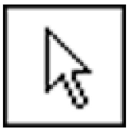


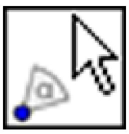
Fig. 4.b

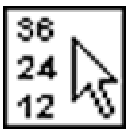
- La figure 4.a donne la représentation de la suite numérique (u_n) définie par :
  $u_{n+1} = u_n + 2{\cdot}n - 11$
  Sa représentation permet de conjecturer que cette suite peut être définie par une relation explicite $u_n = f(n)$ où f un polynôme du second degré.
- La figure 4.b donne la représentation de la suite complexe (z_n) définie par :
  $$f(z) = \frac{1}{2}{\cdot}(1+i){\cdot}z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \quad ; \quad a_0 = 4+2i \quad ; \quad a_{n+1} = f(a_n)$$
  On peut conjecturer facilement la convergence de la suite (z_n) ainsi que le centre de la similitude directe définie par la fonction f.

B. Fonctionnalités :

Sélection :

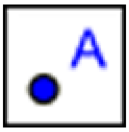

permet de déplacer un point dans le plan ; il faut que ce point soit un point libre ou ait un degré de liberté relativemen avec l'objet sur lequel il est créé.


permet de faire tourner un point libre autour d'un autre point. On clique d'abord sur le point de référence avant de sélectionner le second point et le faire tourner

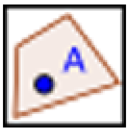


permet de récupérer les coordonnées un point du plan dans la fonction tableur de Geogebra.

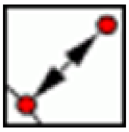
Création de points :



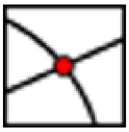
crée un point libre dans le plan.



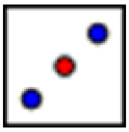
si un polygone a été créé au préalable, cet outil permet de placer un point à l'intérieur de ce polygone. Ce point est un point libre à l'intérieur de ce polygone mais ne pourra pas sortir de celui-ci.



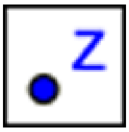
Cet outil permet de lier un point libre à un objet *(droite, polygone. . .)* ou alors de transformer un point lié en un point libre.



permet d'obtenir le ou les points d'intersection de deux objets.

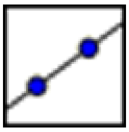


Cet outil permet de placer le milieu de deux autres points.

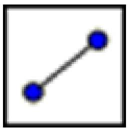


permet de placer un point mais sera repéré dans le plan complexe : son affixe apparaitra dans le panneau "*Algebre*".

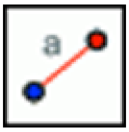
• Droites, segments, demi-droites, vecteurs. . . :



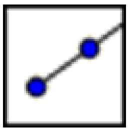
trace la droite passant par deux points.



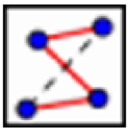
trace le segment reliant deux points.



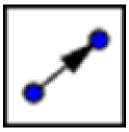
permet de créer un point à une distance fixée d'un autre point.



permet de créer une demi-droite, d'origine le premier point sélectionné et passant par le second point.



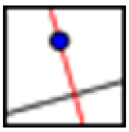
permet de relier des points successifs par des segments *(une ligne brisée)*. On finit la création de la ligne brisée en sélectionnant le point de départ.



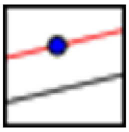
permet de définir un objet-vecteur à partir de deux points.

permet de créer le représentant d'un vecteur déjà présent en indiquant l'origine de ce représentant.

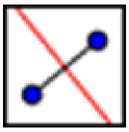
• Droites particulières et lieu géométrique :



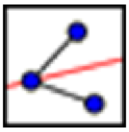
trace la droite passant par un point et perpendiculaire à une autre.



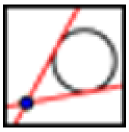
trace la droite passant par un point et parallèle à une autre.



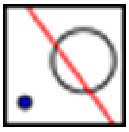
trace la médiatrice d'un segment en sélectionnant les extrémités de celui-ci.



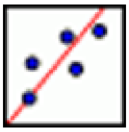
trace la bissectrice d'un angle ; en sélectionnant successivement une extrémité, un sommet et l'autre extrémité de l'angle concerné.



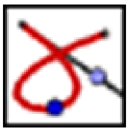
permet de créer la ou les tangentes à un objet passant par un point.



permet de créer la polaire ou le diamètre d'une conique.

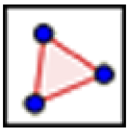


crée une droite d'ajustement linéaire entre plusieurs points du plan.

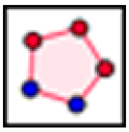


présente le lieu géométrique d'un point en fonction de la position d'un autre point *(le premier point doit être lié au second)*.

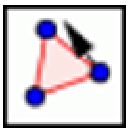
Polygones :



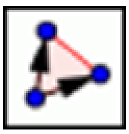
crée un polygone à partir de plusieurs points.



crée un polygone régulier en spécifiant son centre, deux de ses sommets et le nombre de sommets composant ce polygone régulier.

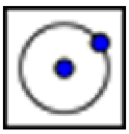


crée un polygone indéformable : un de ses points permet de le déplacer, un autre à le faire pivoter mais une fois créé, on ne peut modifier un tel polygone.

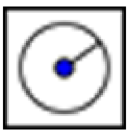


crée un polygone semi-déformable : un point permet de déplacer le polygone dans le plan, les autres points permettent de le déformer.

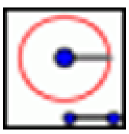
Cercles et arc de cercles :



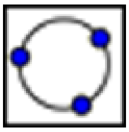
permet de créer un cercle en sélectionnant son centre puis un de ses points.

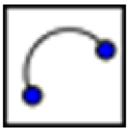


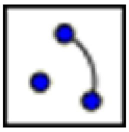
permet de créer un cercle à partir de son centre et de la mesure de son rayon.

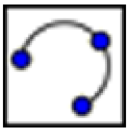


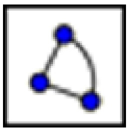
permet de créer un cercle de rayon donné. On sélectionne d'abord un segment définissant la dimension du rayon puis son centre.

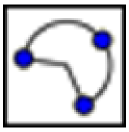

trace l'unique cercle passant par trois points *(non-aligné)*.


trace un demi-cercle en sélectionnant deux points diamétralement opposés. L'ordre des points sélectionnés définit un ou l'autre des demi-cercles correspondants.


trace un arc de cercle en indiquant d'abord le centre du cercle associé puis les deux extrémités de l'arc de cercle.

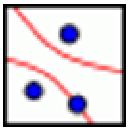

trace un arc de cercle en sélectionnant trois points non-alignés.

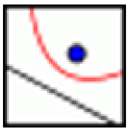

définit un secteur circulaire du centre du cercle associé et les deux extrémités de l'arc considéré.

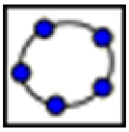

définit un secteur circulaire à partir de trois points du cercle associés.

Courbes de references :

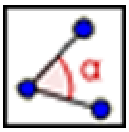

trace une conique à l'aide de ses deux foyers et d'un point de cette courbe.


trace une hyperbole à partir de ses deux foyers et d'un point de la courbe.

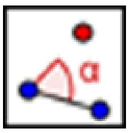

trace une parabole en fonction de son foyer et de sa directrice.


trace une conqiue passant par cinq points *(quatre points ne peuvent pas être alignés)*.

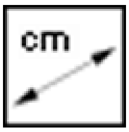
Mesures des objets et création de listes :



détermine la mesure d'un angle. On sélectionne successivement un sommet, le centre puis le second sommet.

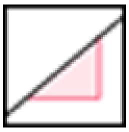


définit le tracé d'un angle. On sélectionne un point, le sommet de l'angle puis on saisi la mesure de l'angle.



mesure la longueur séparant deux points.

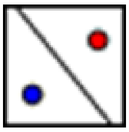
détermine l'aire d'un objet : d'un cercle, d'un polygone prédéfini…



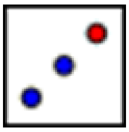
sur un segment ou une droite existance, cet outil présente un triangle mesurant la pente *(le coefficient directeur)* de cet objet.

crée une liste de points en sélectionnant des points présents sur la figure.

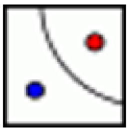
• Transformations du plan :



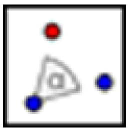
trace le symétrique d'un objet par rapport à une droite ; sélectionner d'abord l'objet puis l'axe de symétrie.



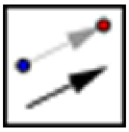
trace le symétrique d'un point par rapport au centre de la symétrie.



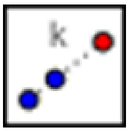
inversion



effectue la rotation d'un point par rapport à un centre et l'angle de la roation.

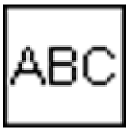


effectue la translation d'un point par rapport à un vecteur ; le vecteur doit être défini au préalable.

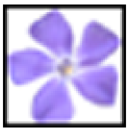


effectue l'homothétie d'un point relativement d'un centre et en définissant le rapport.

• Affichage et misc. :

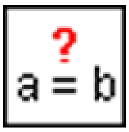


permet de rajouter du texte à la fenêtre d'affichage de Geogebra.

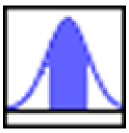


permet d'insérer une image dans Geogebra

le stylo permet de créer une forme libre dans Geogebra.



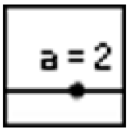
essaye de trouver des relations entre deux objets du plan.



permet d'afficher des lois de probabilités pré-définies permettant d'avoir des valeurs approchés.

l'inspecteur de fonctions permet d'obtenir des informations sur une fonction : racine, maximum…

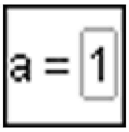
Gestion des interactions pour les scripts :



crée un curseur pour une valeur numérique.

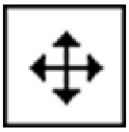
crée un bouton check ou radio gérant une variable booléenne

crée un bouton permettant de lancer, par exemple, l'exécution d'un script.

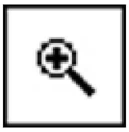


crée un champ texte que l'utilisateur peut modifier.

Gestion de la fenêtre :

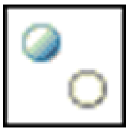


permet de déplacer la vue de Geogebra.



effectue un zoom d'agrandissement

effectue un zoom de retrécissement



permet d'afficher, de cacher successivement les labels des points.

permet de copier le sytle d'affichage d'un objet *(type de trait, police de caractère...)*

permet d'effacer un objet.

C. Fenêtres de travail :

Dans le menu *Affichage*, Geogebra propose différents espaces de travail :

- *Affichage ⇝ Graphique* : cet affichage présente le plan et les constructions qui y sont faites ;
- *Affichage ⇝ Algèbre* : les différents objets construits dans le plan et leurs définitions : valeurs numériques, coordonnées, équation cartésienne de l'objet.

Le champ de saisie accessible via le menu et la commande suivante :

Affichage ⇝ Champ de saisie ⇝ Afficher

On peut directement, dans ce champ de saisie, définir de nouveaux objets :

- soit par leur définition : coordonnées, définition…
- soit par les commandes offertes par Geogebra.

- *Affichage ⇝ Tableur* : un panneau d'affichage offre une mini-feuille de calcul permettant notamment d'obtenir les termes d'une suite numériques ou complexes et de placer ces points dans le plan.
- *Affichage ⇝ Protocole de construction* : cette fenêtre permet de retracer pas à pas les différentes étapes ayant abouties à la figure actuellement présente dans Geogebra.

II. Géométrie :

Dans cette partie, nous allons étudier les outils géométriques de tracé.

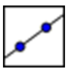
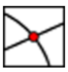
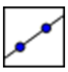
A. Figures de bases :

1. Travaux dirigés :

Exercice 1

On souhaite observer, à l'aide de Geogebra, que les trois médiantes d'un triangle sont concourantes.

La figure 5 présente le triangle ABC doù I, J, K sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[AC]$. On note L le point d'intersection des médianes (CI) et (AJ).

1.  : placer les trois sommets A, B et C du triangle.
2.  : tracer les trois côtés du triangle ABC.
3.  : placer les milieux I, J et K respectivement des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.
4.  : tracer les deux médianes (CI) et (AJ) du triangle ABC.
5.  : avec cet outil, en sélectionnant les deux médianes (CI) et (AJ), Geogebra mettra en évidence le point L intersection de ces deux médianes.
6.  : tracer la droite (BL). Vérifier que cette droite passe par le point K.

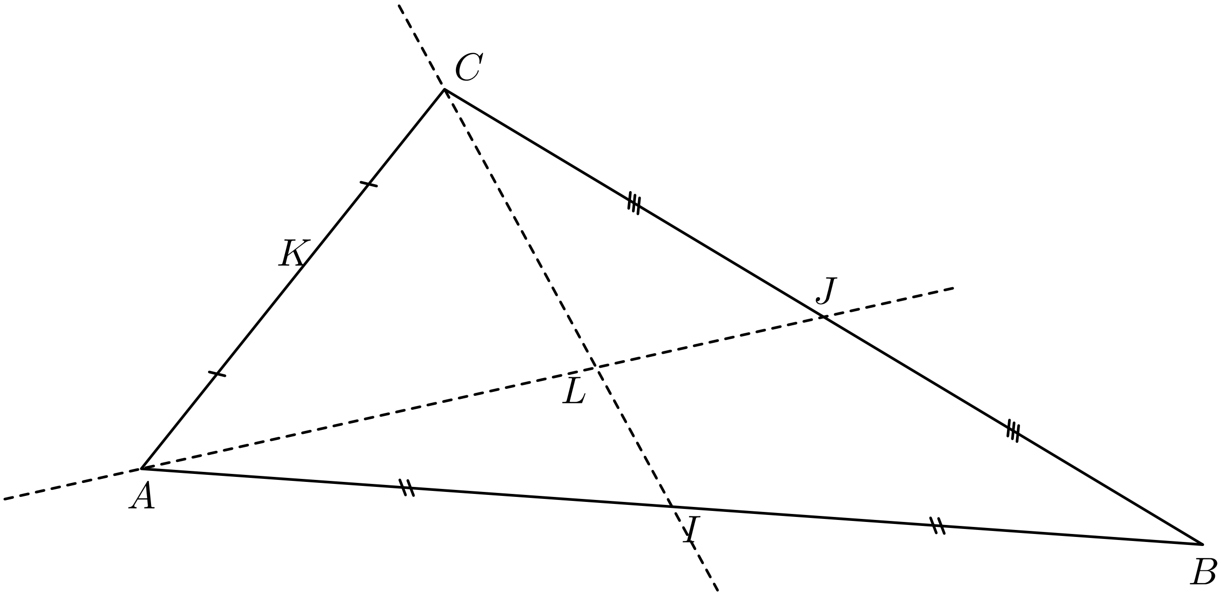


Fig. 5

Geogebra nomme automatiquement les points. Ainsi, lors de leur construction, les milieux des côtés du triangle ABC ne se voient pas forcément nommer par Geogebra avec les lettres I, J et K.

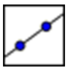
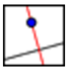
Pour modifier le nom des points, il suffit d'afficher la fenêtre des propriétés de l'objet en effectuant les actions suivantes :

Clic-droit sur le point à renommer ⇝ Menu contextuel ⇝ Renommer...

Il est également possible de choisir la commande *Propriétés* de ce menu contextuel. Le champ "*nom*" permet de renommer ce point

Exercice 2

La figure 6 montre un triangle rectangle ABC rectangle en A et mettra en évidence que le cercle circonscrit d'un triangle rectangle a pour centre le milieu de l'hypothénuse.

1.  : placer les deux sommets A et B du triangle ABC.
2.  : tracer la droite (AB).
3.  : tracer la droite (d') perpendiculaire à la droite (AB) passant par le point A.
4.  : placer un point libre sur la droite (d') ; on nommera ce point C.

Lors de la construction d'une figure, des objets sont crées mais non pas lieu d'apparaître dans la production finale : il est souvent utile de les cacher afin que l'affichage ne soit pas trop surchargée.

Pour cacher un objet, il suffit d'actionner les commandes ci-dessous :

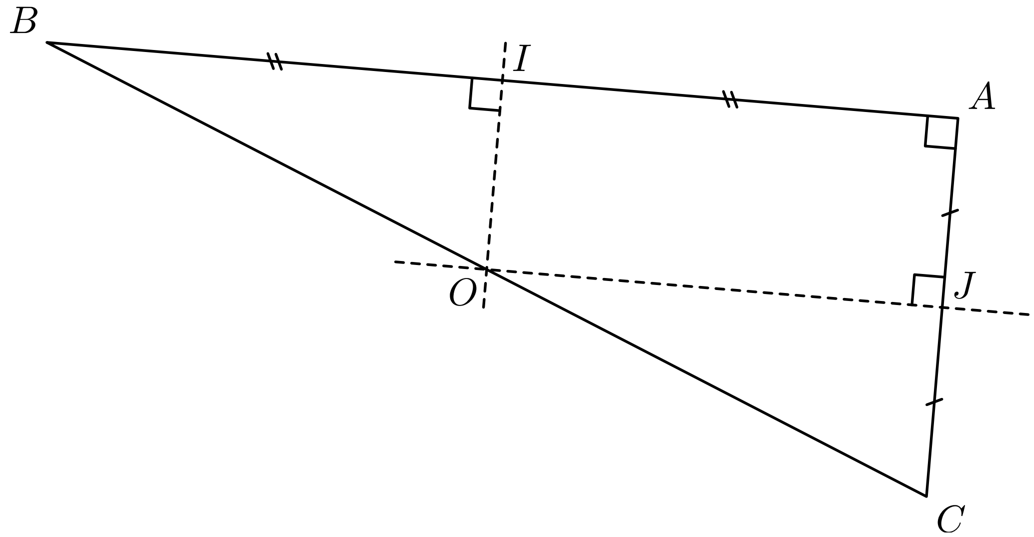


Fig. 6

Clic-droit sur l'objet ⇝ Menu contextuel ⇝ Décocher "Afficher l'objet"

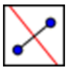
Pour ré-afficher un objet, il faut que le le panneau "*Algèbre*" soit affiché ; à partir de la barre des menus, exécuter les commandes suivantes :

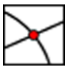
Affichage ⇝ Cocher "Algèbre"

On repère les objets existants mais cachés par le rond vide précédent leur nom. En cliquant sur ce rond, l'objet s'affiche à nouveau et son nom est alors précédé d'un rond plein.

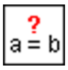
5. En suivant les indications précédentes, cacher les droites (d) et (d').

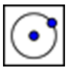
6.  : tracer les trois côtés du triangle ABC.

7.  : tracer les médiatrices des deux côtés $[AB]$ et $[AC]$.

8.  : nommer O le point d'intersection de ces deux médiatrices.

9. Cacher les deux médiatrices tracés.

10.  : interroger la relation entre le point O et le segment $[BC]$.

11.  : tracer le cercle de centre O passant par le point B.

Un objet pour Geogebra est aussi bien un nombre numérique, qu'un point, qu'un segment, qu'un polygone, qu'un cercle. . .

Il existe deux sortes d'objets créés par Geogebra :

- Les objets *libres* : ce sont les points ou les valeurs numériques créés directement par l'utilisateur.
- Les objets *dépendants* : ce sont les objets *(de tout type)* créés à partir d'autres objets. Ils sont donc dépendants d'objets précédemment créés.

Un point d'épendant peut posséder un certain de libertés avec l'objet avec lequel est crée *(point d'un segment, point d'un cercle)*

12. Cette figure contient deux points libres et un point "*semi-libre*". Préciser lesquelles et leurs degrés de libertés ?

....

....

13.  : déplacer les points libres pour observer la conservation des propriétés algébriques de cette figure.

Exercice 3

Geogebra possède également les outils correspondants aux différentes transformations du plan.

La figure 7 présente le symétrique du triangle ABC par rapport à la droite (d).

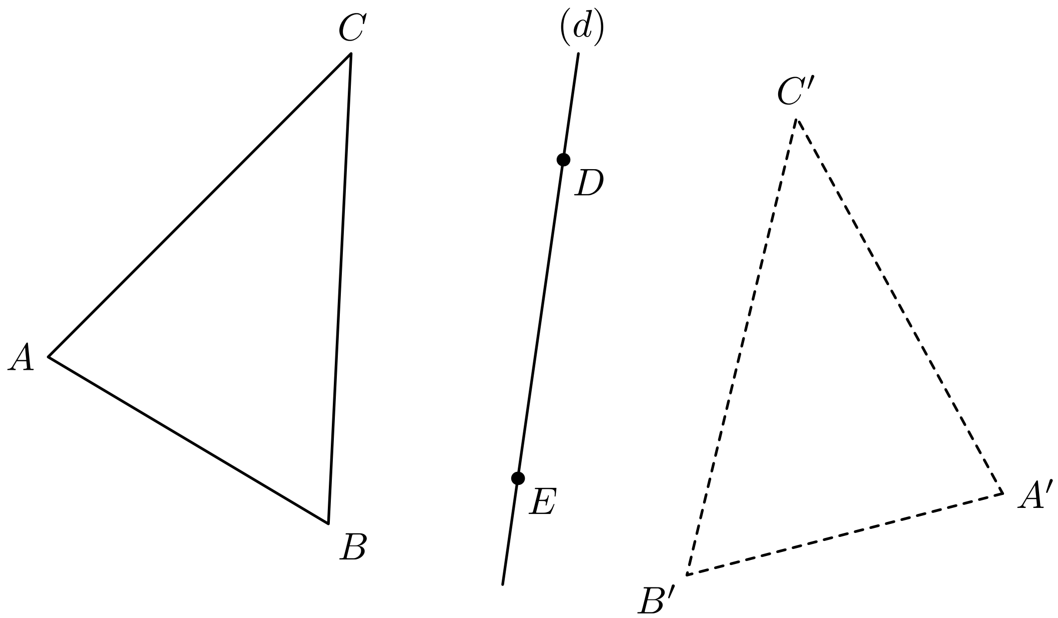
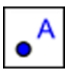
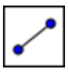
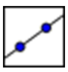
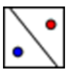
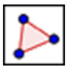
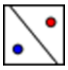


Fig. 7

1.  : placer trois points A, B et C dans le plan.
2.  : tracer le segment $[AB]$.
3.  : placer deux points D et E.
4.  : tracer la droite (DE).
5.  : tracer l'image du segment $[AB]$ *(on sélectionnera un point intérieur au segment)* par rapport à la droite (DE).
6. Combien d'objets a créés Geogebra pour effectuer le symétrique de ce segment ?

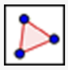
....

7.  : créer l'objet-polygone ABC.

8.  : tracer le symétrique du triangle ABC *(on sélectionnera un point intérieur au segment)* par rapport à la droite (DE).

9.  : déplacer des points libres de cette figure afin d'observer que les changements sur les points libres se répercutent dynamiquement sur le triangle image.

Pour le tracé du symétrique d'un triangle, plusieurs méthodes peuvent être utilisées :

- faire le symétrique des sommets et reconstruire le triangle image ;
- faire le symétrique des côtés. Alors chaque sommet aura deux images car appartenant à deux côtés : cela surchargera un peu la figure ;
- ou alors on définit le triangle comme un unique objet, à l'aide de l'outil  polygone, et on effectue le symétrique de cet objet.

2. *Travaux pratiques :*

Exercice 4

Tracer un trapèze $ABCD$ tel que $(AB)//(DC)$ de sorte que les seuls points libres soient A, B et C : le point D appartiendra à la parallèle à (AB) passant par le point C.
Placer les points I, J, K et L milieux respectifs des segments $[AD]$, $[BC]$, $[AC]$ et $[BD]$.

Vérifier que les quatres points I, J, K, L sont alignés.

Exercice 5

Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles de centre respectifs O et O' s'interceptant en deux points M et N. On nomme A et B les points diamétralement opposés au point M respectivement dans le cercle $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

Vérifier que les points A, N et B sont alignés.

B. Mesure :

1. *Travaux dirigés :*

Exercice 6

La figure 8 présente un quadrilaère quelconque $ABCD$. Les points D' et B' sont les translatés des points B et D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Nous allons établir à l'aide de Geogebra une relation entre les aires des quadrilatère $ABCD$ et $BB'D'D$.

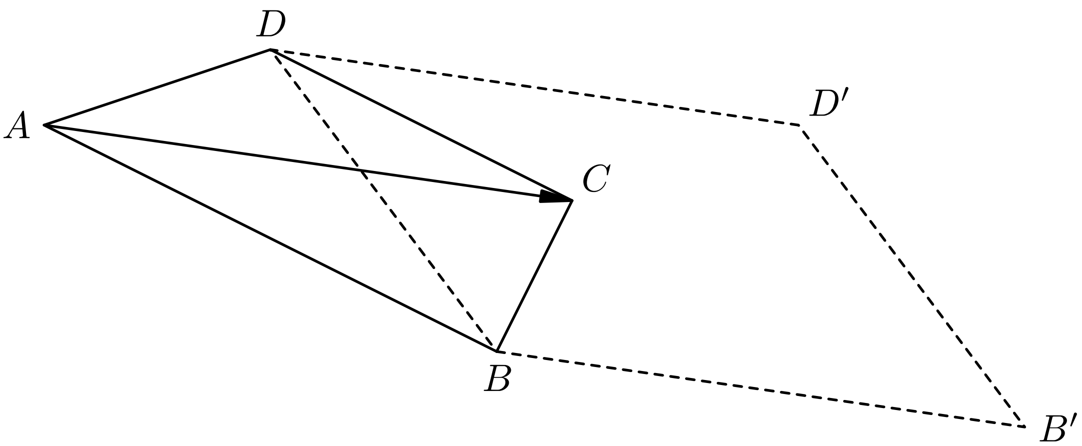
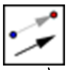
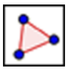


Fig. 8

1.  : placer quatre points A, B, C, D formant le quadrilatère non-croisé $ABCD$.
2.  : définir le vecteur $\overrightarrow{AC}$
3.  : placer B' et D' les translatés respectifs des points Bet D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
4.  : définir les deux polygones $ABCD$ et $BB'D'D$.
5. a.  : afficher les aires de ces deux polygones.

   b. Quelle remarque peut-on faire sur ces deux mesures ?

....

   c. On augmente la précision de Geogebra à l'aide de la commande suivante à partir de la barre de menu :

   Options ⇝ Arrondi ⇝ 15 décimales
6.  : déplacer les points libres de cette configuration et vérifier que la relation sur les deux aires reste toujours vraie.

Exercice 7

On considère la figure 9 présentant un cercle $\mathscr{C}$ et un triangle ABC inscrit dans ce cercle. M sur l'arc $\overset{\frown}{AB}$.
Nous allons utilser Geogebra pour mettre en évidence la relation métrique suivante :

$MC = MA + MB$.

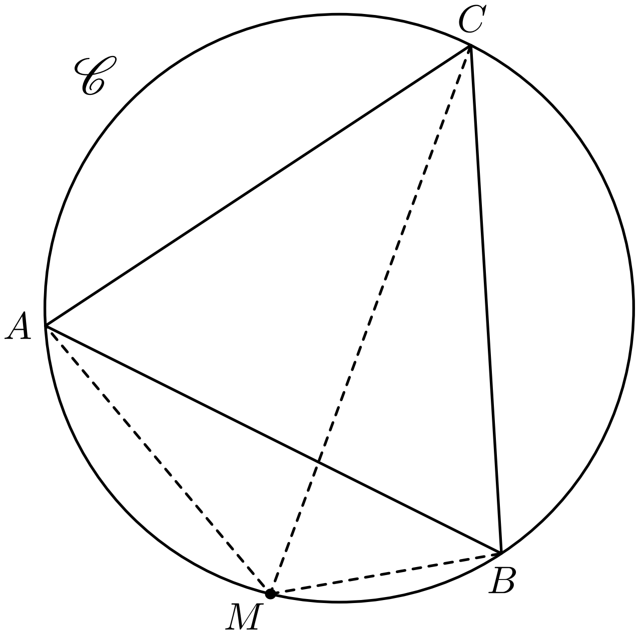


Fig. 9

1. : tracer un triangle ABC équilatéral ; donc un polygone régulier à trois côtés.
2. : tracer les médiatrices (d) et (d') du segment $[BC]$ et du segment $[AC]$.
3. : placer le point O intersection des droites (d) et (d').
4. : tracer le cercle circonscrit au triangle ABC.
5. Cacher les médiatrices (d) et (d') et le point O.
6. : placer un point M appartenant à l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$.
7. : tracer les segments $[MC]$, $[MB]$ et $[MA]$.
8. : afficher les mesures des longueurs des segments $[MA]$, $[MB]$ et $[MC]$.
9. Remarquer l'égalité : $MC = MA + MB$.

On pourra changer le nombre de décimales affichées par Geogebra en utilisant la commande suivante à partir de la barre de menu :

Options ⇝ Arrondi ⇝ 5 décimales

Exercice 8

La figure `b-exo4` présente un triangle ABC et un point M, intérieur au triangle ABC, vérifiant l'égalité $\widehat{ACM} = \widehat{ABM}$. On note P et Q les projetés orthogonaux du point M respectivement sur $[AC]$ et $[AB]$. On note I, J, K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[BM]$ et $[CM]$. Les outils de mesure de Geogebra nous permettront de montrer que les triangles IJP et IKQ sont isométriques.

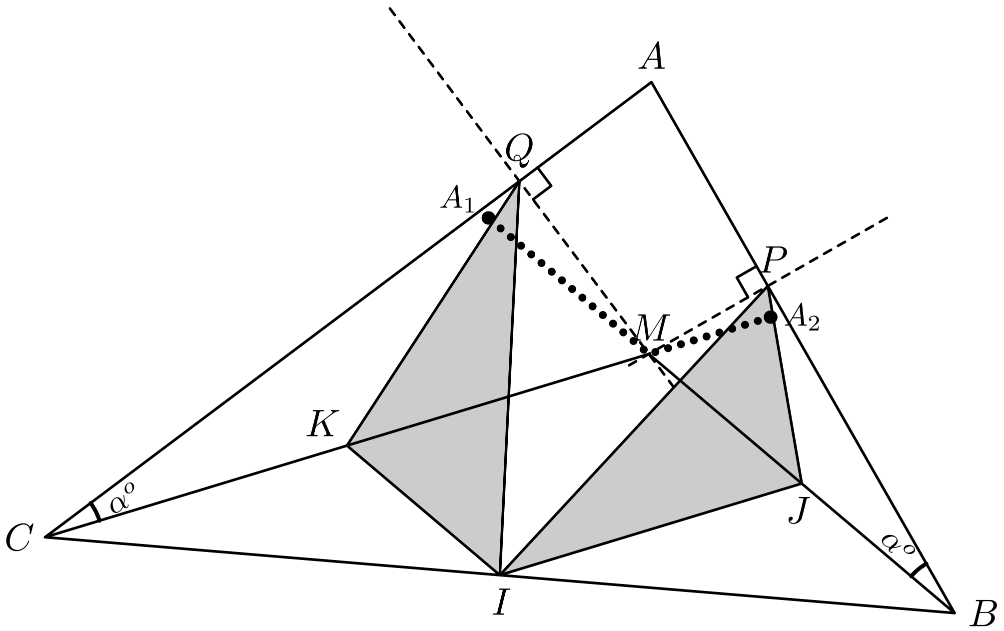
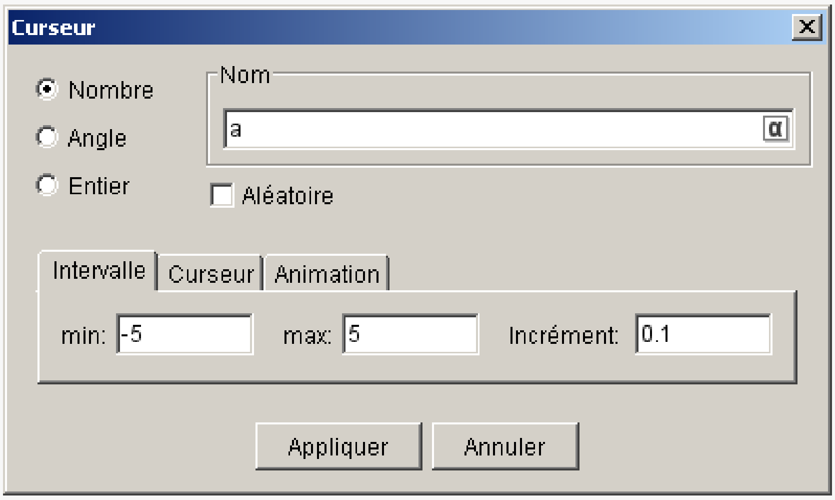


Fig. 10

1. : placer trois points A, B et C non alignés dans le plan.

2. : tracer les trois côtés du triangle ABC.

Un curseur est défini à l'aide de la commande . Lors de la création d'un curseur, la fenêtre suivante s'affiche :



Elle permet de définir les paramètres suivants :

- Le nom du curseur. Les lettres grecques sont accessibles via le bouton à droite "α".
- La nature du curseur ; il peut désigner :
  - un nombre. Un tel curseur peut, par exemple, être utilisé avec l'outil ; il représente alors une longueur ;
  - un angle. On peut utiliser le curseur avec l'outil .
  - un entier. Il peut être utiliser avec l'outil .

Lors de l'utilisation d'un angle avec Geogebra, par exemple avec :

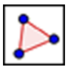
- un nombre sans suffixe est considéré comme une mesure en radian.
- un nombre suivi de ^{o} est un angle mesuré en degré.

Si on définit, pour un curseur-angle α, l'intervalle de valeurs de 0^o à 360^o, on utilisera ce curseur en notant α et non pas α^o.
Le symbole ^{o} est utilisé par Geogebra comme un coefficient de proportionnalité de valeur $\dfrac{180}{\pi}$.

- En bas de la fenêtre se trouve trois onglets pour diverses options :
  - "*Intervalle*" : permet de définir l'intervalle de valeurs prises par le curseur ;
  - "*Curseur*" : définit la position et l'apparence du curseur ;
  - "*Animation*" : permet de définir les paramètres d'animation du curseur. Pour activer l'animatin d'un curseur, il faut effectuer un clic-droit sur le curseur, une fois définie, et actionner la commande :

    menu contextuel ⇝ Animer

3. : définir un curseur α représentant un angle dont la mesure soit comprise dans l'intervalle $[0^o\,;\,90^o]$
4. : le point A_1 est l'image de A par la rotation de centre B et d'angle α ou $-\alpha$ *(de sorte à ce que $[BA_1)$ passe par l'intérieur du triangle ABC).*
5. : le point A_2 est l'image de A par la rotation de centre C et d'angle α ou $-\alpha$ *(de sorte à ce que $[BA_2)$ passe par l'intérieur du triangle ABC).*
6. : tracer la droite (BA_1) et (CA_2).
7. : nommer M le point d'intersection des droites (BA_1) et (CA_2).
8. Cacher les points A_1 et A_2 et les droites (CA_1) et (BA_2).
9. : tracer les deux droites (d) et (d') passant par M et perpendiculaires respectivement à la droite (AB) et à la droite (AC).
10. : nommer P le point d'intersection des droites (d) et (AB), et Q le point d'intersection des droites (d') et (AC).
11. Cacher les droites (d) et (d').
12. : placer les points I, J, K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[BM]$, $[CM]$.

13.  : tracer les polygones IJP et IKQ.

14.  : afficher les aires de ces deux polygones.

15.  : afficher les mesures des côtés des deux triangles IJP et IKQ. On remarquera que ces deux triangles sont isométriques.

16.  : déplacer les points libres ou le curseur définissant l'angle α pour vérifier que les deux triangles IJP et IKQ restent isométriques.

2. Travaux pratiques :

Exercice 9

A l'aide d'un logiciel de géométrique, tracer un rectangle $ABCD$ avec $AD>AB$. Soit I le milieu du segment $[BC]$. On note J le point d'intersection des droites (BD) et (AI).

Déplacer les points libres de cette configuration afin que l'angle $\widehat{BHA}$ soit un angle droit. Vérifier alors que $\dfrac{AD}{AB} = \sqrt{2}$

Exercice 10

On considère un quadrilatère $ABCD$ convexe. On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[AD]$, $[AC]$, $[BD]$.
On note P le point d'intersection des diagonales du quadrilatère $ABCD$. Q est le point du plan tel que le quadrilatère $MPNQ$ soit un parallélogramme.

Déterminer les mesures des quadrilatères $AIQL$, $BIQJ$, $CJQK$ et $DKQL$.

C. Lieu géométrique :

1. Travaux dirigés :

Exercice 11

La figure 11 présente trois points A, B et C du plan. On considère le cercle $\mathscr{C}$ ayant A pour centre et passant par le point B.

Pour chaque point M du cercle $\mathscr{C}$, on définit le point N comme étant l'unique point du plan formant un triangle CMN équilatéral de sens direct.

Geogebra va nous aider à connaitre le lieu géométrique du point N lorsque le point M parcourt le cercle $\mathscr{C}$.

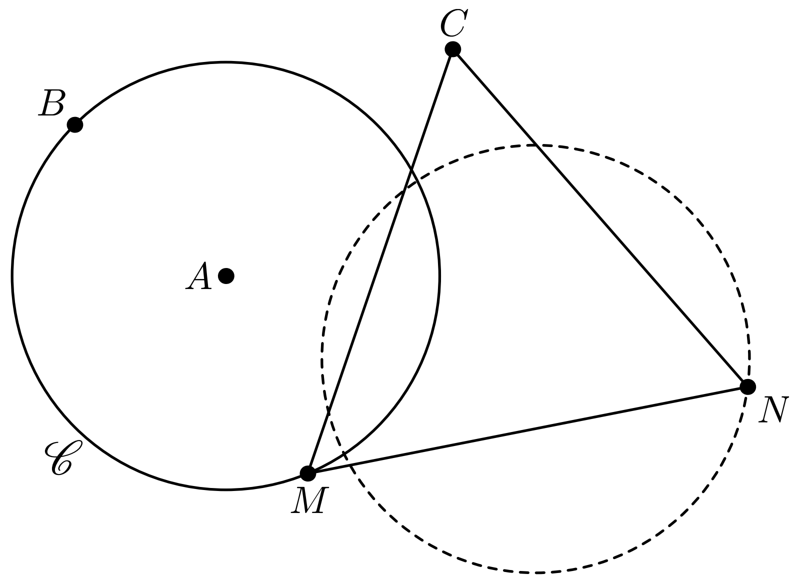
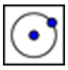
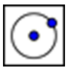
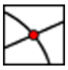
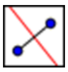
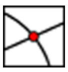
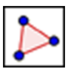


Fig. 11

1.  : placer trois points A, B, C non alignés du plan.
2.  : tracer le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et passant par B.
3.  : placer un point M appartenant le cercle $\mathscr{C}$.
4.  : tracer les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de centre respectifs C et M et de même rayon $[CM]$.
5.  : nommer N le point d'intersection des cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ tel que le triangle CMN soit un triangle de sens direct.
6. Cacher les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ et le second point d'intersection de ces deux cercles.
7.  : afficher le lieu géométrique du point N lorsque le point M parcourt le cercle $\mathscr{C}$.

On note $\mathscr{C}'$ le cercle définit par le lieu géométrique du point N. On va mainteant mettre en évidence une propriété de cette figure

8.  : placer trois points I, J, K trois points du cercle $\mathscr{C}'$.
9.  : tracer les deux médiatrices des segments $[IJ]$ et $[JK]$.
10.  : nommer O le point d'intersection des médiatrices.
11. Cacher les points I, J, K et les deux médiatrices associées.
12.  : tracer le triangle ACO.

Exercice 12

Dans la figure 12, on considère un carré $ABCD$ de sens direct. Le point M est un point de la demi-droite $[BC)$ n'appartenant pas au segment $[BC]$. On note N le point d'intersection des droites (CD) et (AM), et P le point d'intersection de la droite (BC) et de la droite passant par A perpendiculaire à (AM). Le point Q est le milieu du segment $[PN]$.

On note I le centre du carré $ABCD$.

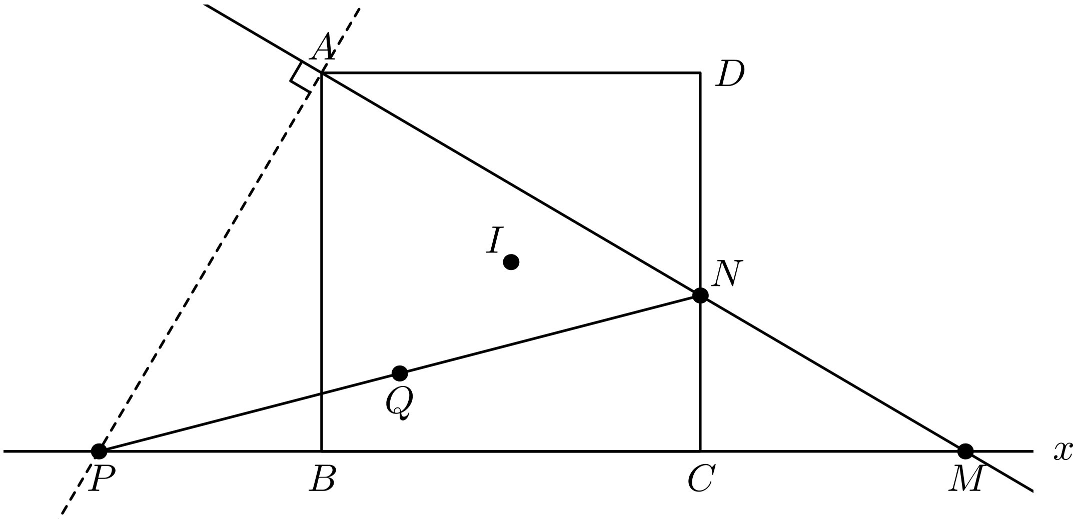
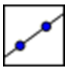
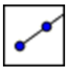
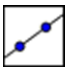
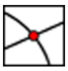
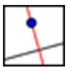
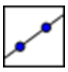
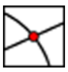
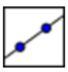
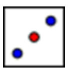


Fig. 12

Geogebra va nous aider à déterminer le lieu géométrique du point Q lorsque le point M décrit la demi-droite $[Cx)$.

1.  : tracer un carré nommé $ABCD$ de sens direct.
2.  : placer le point I centre du carré $ABCD$.
3.  : tracer la droite (BC).
4.  : placer un point R sur la demi-droite $[BC)$ n'appartenant pas au segment $[BC]$.
5. Cacher la droite (BC).
6.  : tracer la demi-droite $[CR)$.
7.  : placer un point M sur la demi-droite $[CR)$
8. Cacher le point R et la demi-droite $[CR)$.
9.  : tracer la droite (AM).
10.  : nommer N le point d'intersection des droites (AM) et (DC).
11.  : tracer la perpendiculaire (d) à la droite (MN) passant par le point A.
12.  : tracer la droite (BC).
13.  : nommer P le point d'intersection des droites (BC) et (d).
14.  : tracer le segment $[NP]$.
15.  : placer le point Q milieu du segment $[NP]$.
16.  : afficher le lieu du point Q lorsque le point M décrit la droite $[Cx)$.

2. Travaux pratiques :

Exercice 13

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O. On considère deux points A et B appartenant au cercle $\mathscr{C}$ tels que $[AB]$ ne soit pas un diamètre de ce cercle. Les tangentes (d) et (d') au cercle $\mathscr{C}$ respectivement en A et B s'interceptent au point T.

Soit M un point du cercle, on considère la droite (TM) qui intercepte le cercle $\mathscr{C}$ en second point nommé N.

On note I le milieu du segment $[MN]$.

Déterminer le lieu géométrique du point I lorsque le point M décrit le cercle $\mathscr{M}$.

Exercice 14

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et A un point intérieur au cercle. Soit M un point du cercle $\mathscr{C}$. On note N le symétrique du point A par rapport au point M.

Déterminer le lieu du point N lorsque le point M décrit le cercle $\mathscr{C}$.

III. Géométrie analytique :

A. Présentation :

Geogebra permet également de manipuler ses objets à partir de leurs coordonnées dans un repère orthonomal : le panneau "*Algebre*" affiche les coordonnées des points et les équations définissant les droites, les cercles...
On affiche le panneau "*Algebre*" à partir de la barre des menus à l'aide de la commadne suivante :

Affichage ⇝ Algèbre

La barre des outils permet d'accéder aux fonctionnalités de Geogebra à travers des boutons. Il est également possible de manipuler les objets géométriques de Geogebra à l'aide de commandes en lignes. On utilise le "*champ de saisie*" qui s'affiche lorsqu'on actionne la commande suivante à partir de la barre des menus :

Affichage ⇝ Champ de saisie ⇝ Affiché

Dans ce champ de saisie, un point peut être défini de trois manières différentes :

- `A=(sqrt(3),1)` : ses coordonnées cartésiennes ;
- `A=(2;30°)` : ses coordonnées polaires ;
- `A=sqrt(3)+i` : son affixe complexe.

Toutes les commandes accessibles via les icônes sont aussi accesibles dans le champ de saisie via leur nom. L'ensemble de ces commandes est actuellement accessible à l'adresse :

`http://wiki.geogebra.org/fr/Catégorie:Commandes`

Remarque : le nombre π s'obtient en tapant `pi` dans la barre de saisie.

B. Computer Algebre System (CAS) :

Geogebra intègre également un moteur de calcul formel permettant quelques manipulations algébriques courantes ; ces fonctionnalités sont accessibles dans la version 4 qu'au travers de la ligne de commande. La version 5.0β offre quant à une fenêtre dédiée à ces fonctionnalités.

Voici une liste d'exemples d'utilisation de ces commandes et leur description :

- `a=RandomBetween[5,12]` : détermine un entier aléatoire entre les deux bornes précisées incluses.
- `a=GCD[30,12]` : déterminer le plus grand diviseur commun de deux nombres.
- `a=LCM[12,15]` : détermine le plus grand commun multiple des nombres 12 et 15.
- `f(x)=Expand[(x^2+3)(x-3)]` : développe une expression algèbrique.
- `f(x)=Factor[x^2-5x+6]` : factorise une expression algèbrique.
- `A=Intersect[x^2+x,2x+1,(0,0)]` : détermine l'intersection de deux courbes par la méthode de Newton avec l'utilisation d'un point initial.
- `f(x)=Div[x^2+2x+3,x+1]` : effectue la division euclidienne d'un polynôme par un autre et n'affiche que le quotient.
- `f(x)=Derivative[x^2+1]` : déterminer l'expression de la dérivée d'une fonction.
- `f(x)=Integral[x^2-2x]` : déterminer la primitive d'une expression.
- `A=Min[x^2,-1,2]` : détermine le minimum d'une fonction sur un intervalle.
- `A=Max[-x^2+1,-1,2]` : détermine le maximum d'une fonction sur un intervalle.

De nombreuses autres commandes sont possibles *(notamment statistiques et probabilistes)* et davantage sont présentes dans la version $5.0.\beta$.

C. Utilisation des coordonnées :

1. Travaux dirigés :

Exercice 15

Voici un exercice déjà vu dans le chapitre précédent, mais cette fois ci en utilisant le champs de saisie :

1. Saisir les commandes suivantes :

   a. `A=(0,0)`
   b. `B=(1,0)`
   c. `C=(1,1)`
   d. `D=(0,1)`
   e. `O=0.5(A+C)`
   f. `a=segment[C,D]`
   g. `M=point[a]`
   h. `b=droite[A,M]`
   i. `c=perpendiculaire[A,b]`
   j. `d=droite[B,C]`
   k. `N=intersection[c,d]`
   l. `I=milieuCentre[N,M]`
   m. `lieu[I,M]`

2. Effectuer un clic-droit sur le point `M` et actionner la commande suivante :

   Clic-droit ⇝ Menu contextuel ⇝ Animer

On peut remarquer que dans le code ci-dessous utilies deux manières de définir le milieu d'un segment :

- `O=0.5(A+C)` : cette expression illustre la formule mathématique définissant le milieu de deux points à l'aide de leurs coordonnées.
- `I=milieuCentre[N,M]` : ici, on utilise la commande interne à Geogebra pour construire le milieu d'un segment.

Il est facile de lancer l'animation d'un point, il est souvent plus difficile de l'arrêter surtout lorsque celui-ci se déplace rapidement. On sélectionne alors ce point dans le panneau "*Algebre*" et en effectuant un clic droit sur ce point, on décoche la commande :

Clic-droit ⇝ Menu contextuel ⇝ Animer

Exercice 16

Dans cette exercice, nous allons illustrer la construction d'une courbe de Béziers définie à l'aide de quatre points. La définition paramétrique d'une courbe de Béziers est basée sur l'usage de barycentres :

1. Saisir les commandes suivantes dans la barre de saisie :

a. `t=curseur[0,1,0.001]`
b. `A=(1,1)`
c. `B=(5,2)`
d. `C=(6,6)`
e. `D=(1,7)`
f. `I=t*A+(1-t)*B`
g. `J=t*B+(1-t)*C`
h. `K=t*C+(1-t)*D`
i. `M=t*I+(1-t)*J`
j. `N=t*J+(1-t)*K`
k. `P=t*M+(1-t)*N`
l. `lieu[P,t]`
m. `vecteur[A,B]`
n. `vecteur[D,C]`

2. Dans le panneau *Algèbre*, cacher tous les points sauf `A`, `B`, `C` et `D`.

3. En faisant un clic droit sur le curseur `t`, actionner la commande suivante :

Clic-droit ⇝ Menu contextuel ⇝ Animer

Voici quelques remarques sur l'exercice précédent :

- La commande `t=curseur[0,1,0.001]` définit la variable numérique `t` prenant des valeurs dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ et avec un pas d'incrémentation de 0,001
- Avec la commande `I=t*A+(1-t)*B`, le point `I`, ainsi défini, est le barycentre du système $\{(\texttt{A}\,;\,\texttt{t})\,;\,(\texttt{B}\,;\,\texttt{1-t})\}$. On remarquera la paramétrisation d'un intervalle $[a\,;\,b]$ par `t*a+(1-t)*b`
- La commande `lieu[P,t]` affiche le lieu géométrique pris par le point `P` lorsque la variable `t` décrit son intervalle de définition.
- La commande `vecteur[A,B]` crée le vecteur d'origine `A` et d'extrémité `B`.

Exercice 17

On construit un rectangle à l'intérieur d'un triangle rectangle. Le but de l'exercice est la position du point `M` afin que l'aire du rectangle soit maximale :

1. Saisir les commandes suivantes :

a. `A=(0,0)`
b. `B=(3,0)`
c. `C=(0,2)`
d. `seg_1=segment[A,B]`
e. `seg_2=segment[A,C]`
f. `seg_3=segment[B,C]`
g. `M=point[seg_3]`
h. `d=perpendiculaire[M,seg_1]`
i. `e=perpendiculaire[M,seg_2]`
j. `N=intersection[d,seg_1]`
k. `P=intersection[e,seg_2]`
l. `f=polygone[A,N,M,P]`
m. `Q=(x(M),f)`
n. `lieu[Q,M]`

2. Déterminer la valeur approchée de la distance `CM` afin que l'aire du rectangle `ANMP` soit maximale.

> Le point `Q` est défini par `Q=(x(M),f)`. Ainsi, le point `Q` illustre à la même abscisse que le point `M` et a pour ordonnée l'aire du rectangle `ANMP`.
>
> Le fait d'afficher le lieu géométrique du point `Q` en fonction du point `M` trace la courbe qui à l'abscisse du point `M` associe l'aire du rectangle.
>
> On observe ainsi facilement la position du point `M` réalisant le maximum de l'aire du rectangle `ANMP`.

2. Travaux pratiques :

Exercice 18

Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,\pi]$. Dans le plan, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et passant par le point A.

On considère les deux points M et N tels que :

$\widehat{AOM} = \alpha^o \quad ; \quad \widehat{AON} = \alpha^o$

1. Créer un curseur représentant la variable réelle α.
2. Réaliser cette représentation en liant les points M et N au curseur α
3. Insérer le point P ayant pour abscisse la valeur de α et pour l'ordonnée l'aire du triangle AMN.
4. En affichant le lieu du point P en fonction de la valeur de α, déterminer les caractéristiques du triangle réalisant l'aire maximale.

Exercice 19

Un point M appartient au quart de cercle formé par les points A, B et C. A partir de ce point M, on crée un rectangle ayant pour sommet opposé A et M.

Décrire la position du point M réalisant une aire maximale pour ce rectangle.

D. Utilisation de fonctions :

1. Travaux dirigés :

Exercice 20

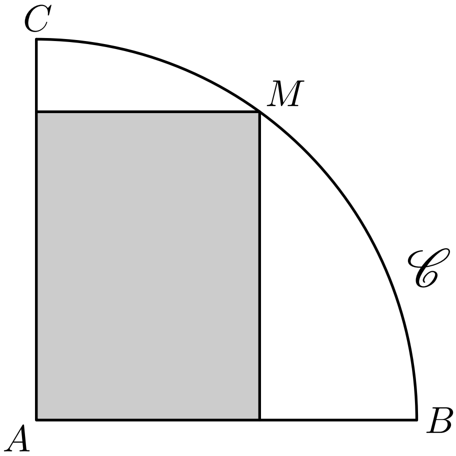


Fig. 13

Geogebra permet de tracer les courbes représentatives de fonctions. L'introduction d'un curseur dans l'expression d'une fonction permet de visualiser facilement une famille de courbes :

1. Saisir les commandes suivantes :

   a. `m=curseur[-1,1,0.01,0.3]`

   b. `f(x)=-x^2+2x-1+m*exp(x)`

2. En fonction de la valeur de `m`, observer le nombre de solutions de l'équation `f(x)=0` sur l'intervalle $[-5\,;\,5]$.

3. Animer cette figure en faisant un clic-droit sur le curseur de la variable numérique `m` en exécutant la commande suivante :

   Clic-droit ⇝ Menu contextuel ⇝ Animer

Pour saisir une fonction dans Geogebra, on utilise la même notation que celle mathématiques : `f(x)=...`

Les fonctions de références sont également accessibles :

- `sqrt(x)` : la racine carré de x
- `cbrt(x)` : la racine cubique de x
- `exp(x)` : l'exponentiel de x
- `ln(x)` : logarithme népérien de x
- `lg(x)` : logarithme décimal de x
- `x^n` : puissance n-ième de x
- `abs(x)` : valeur abscolue de x
- `x(A)` : l'abscisse du point A
- `y(A)` : l'ordonnée du point A
- `floor(x)` : la partie entière de x
- `sin(x)` : le sinus de x
- `cos(x)` : le cosinus de x
- `tan(x)` : le tangente de x
- `asin(x)` : le sinus inverse de x
- `acos(x)` : le cosinus inverse de x
- `atan(x)` : la tangente inverse de x

Exercice 21

Cet exercice présente la recherche de la distance minimale d'un point à une courbe.

1. Saisir les commandes suivantes :

   a. `A=(1,1)`
   b. `f(x)=exp(x)`
   c. `M=point[f]`
   d. `dist=distance[A,M]`
   e. `N=(x(M),dist)`
   f. `lieu[N,M]`

2. Déplacer le point `M` pour réaliser le minimum de la distance `[AM]`.

3. Saisir les commandes suivantes :

   g. `d=droite[A,M]`
   h. `e=perpendiculaire[M,d]`

4. Quelles semblent être la position relative de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et de la droite (d) lorsque le minimum de la distance `AM` est réalisé.

2. Travaux pratiques :

Exercice 22

On condidère la fonction exponentielle notée f.

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f. On note (d) la droite d'équation $y = 3x - 3$

Soit M un point de la courbe $\mathscr{C}$. Déterminer une valeur approchée des coordonnées du point M tel que la distance du point M à la droite (d) soit minimale.

Exercice 23

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1 \quad ; \quad g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{29}{4}$$

On munit le plan d'un repère orthonormal et on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_f$ les courbes représentatives respectivement des fonctions f et g.

Déterminer l'équation réduite d'une tangente commune aux des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

IV. Tableur :

A. Présentation :

Geogebra permet également de créer des feuilles de calculs mais pour un usage simple des feuilles de calculs, il est préférable d'utiliser Calc.

Geogebra présente l'avantage :

- de faciliter la représentation de données à partir de la feuille de calcul ;
- permet la représentation assez facile de suites numériques ;
- les valeurs complexes sont utilisables dans ses feuilles de calculs.

Le panneau présentant une feuille de calcul dans Geogebra est accessible en activant la commande via la barre des menus :

Affichage ⇝ Tableur

Les cellules de la feuille de calcul sont accessibles via le champ de saisie à partir les noms de variables du type :

- `A1`, `A2`, `A3`... sont réservés pour la première colonne ;
- `B1`, `B2`, `B3`... sont réservés pour les cellules de la seconde colonne.

B. Travaux dirigés :

Exercice 24

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad v_0 = 7 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{2 \cdot u_n + v_n}{3} \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2 \cdot v_n}{3}$$

Ces deux suites sont adjacentes : leur représentation dans le plan permettra de mettre en évidence cette propriété.

1. Afficher le panneau "*Tableur*" en actionnant la commande suivante via la barre des menus :
   Affichage ⇝ Tableur
2. Saisir les commandes suivantes :
   a. `A1=0` b. `A2=A1+1` c. `B1=1`
   d. `B2=1/3*(2*B1+C1)` e. `C1=7` f. `C2=1/3*(B1+2*C1)`
3. Sélectionner la plage `A2:C2` et étirer cette plage jusqu'à la ligne 20.
4. a. Sélectionner la plage `A1:B20`, puis créer les points correspondants à l'aide du bouton .
   b. En utilisant la touche `Ctrl`, sélectionner conjointement les plages `A1:A20` et `C1:C20`, puis créer la liste de points correspondants .
5. Quelle relation semble relier les suites (u_n) et (v_n) ?

Exercice 25

Nous allons dans cette exercice un suite de termes complexes ; cet exercice est en lien avec l'écriture complexe des similitudes.

On souhaite représenter graphiquement la suite (z_n) définie par :

$$z_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot i \quad ; \quad z_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot(1+i)\cdot z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot i$$

1. Saisir les commandes suivantes :
   a. `A1=0.5+0.5i` b. `A2=1/2(1+i)A1+1/2+1/2i`
   c. `B1=x(A1)` d. `C1=y(A1)`
2. Sélectionner la cellule `A2` et la recopier jusqu'à la ligne 20.
3. Remarquer que le panneau "*Graphique*" reçoit directement les points ayant pour affixe les valeurs de la colonne `A`.
   Vers quel nombre la suite (z_n) semble converger ?

C. Travaux pratiques :

Exercice 26

On considère la fonction f définie sur $\left]-\infty ; \frac{9}{2}\right[$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x-8}{2x-9}$$

La suite (u_n) est définie par les relations :

$$u_0 = 3{,}9 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

Tracer la courbe représentative de la fonction f et représenté les dix premiers termes de cette suite sur l'axe des abscisses.

Exercice 27

Dans le plan complexe, on considère la suite définie par :

$$z_0 = 2 \quad ; \quad z_{n+1} = \frac{1+i}{2}\cdot z_n$$

1. Représenter les dix premièrs termes de la suite (z_n).
2. Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (z_n).