Compiler exercice Compiler correction Plus d'option

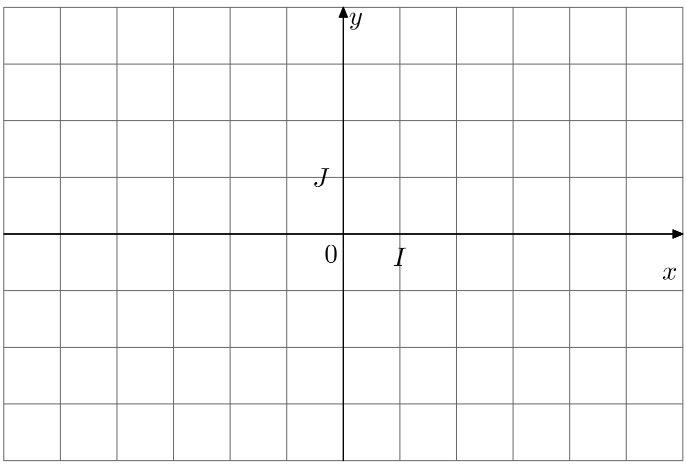
Seconde/Un peu plus d'analyse

1. Fonctions affines par morceaux :

Exercice 420

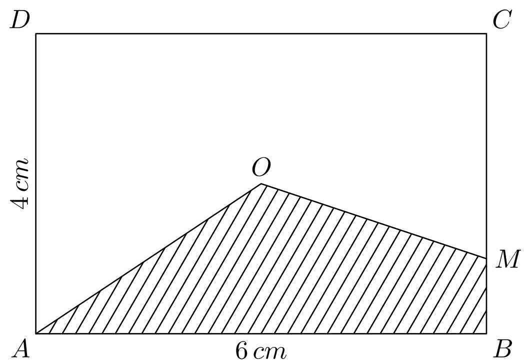
Tracer dans le repère ci-dessous la courbe représentative de la fonction suivante :

$$f : \begin{cases} f(x) = 2x + 8 & \text{si } x \in [-5\,;-2] \\ f(x) = -0.5x + 3 & \text{si } x \in]-2\,;2] \\ f(x) = -2x + 6 & \text{si } x \in]2\,;4] \end{cases}$$



Exercice 3000

Dans le plan, on considère le rectangle $ABCD$ de longueur $5\,cm$ et de largeur $3\,cm$. Un point M parcourt le contour de ce rectangle ; on repère ce point par le nombre x représentant la distance parcourue par ce point en partant de A et en parcourant le rectangle dans le sens direct.



On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire de la partie hachurée lorsque M est repéré par le nombre x.

1. Justifier que la fonction $\mathcal{A}$ est une fonction affine par morceaux en fonction de x définie par le système :

$$\begin{cases} x & \text{pour } x \in [0\,;\,6] \\ \dfrac{3}{2}x - 3 & \text{pour } x \in [6\,;\,10] \\ x + 2 & \text{pour } x \in [10\,;\,16] \\ \dfrac{3}{2} \cdot x - 6 & \text{pour } x \in [16\,;\,20] \end{cases}$$

2. Déterminer la valeur de x pour laquelle on a :
$\mathcal{A}(x) = 20\,cm^2$

2. Tangentes et nombres dérivés :

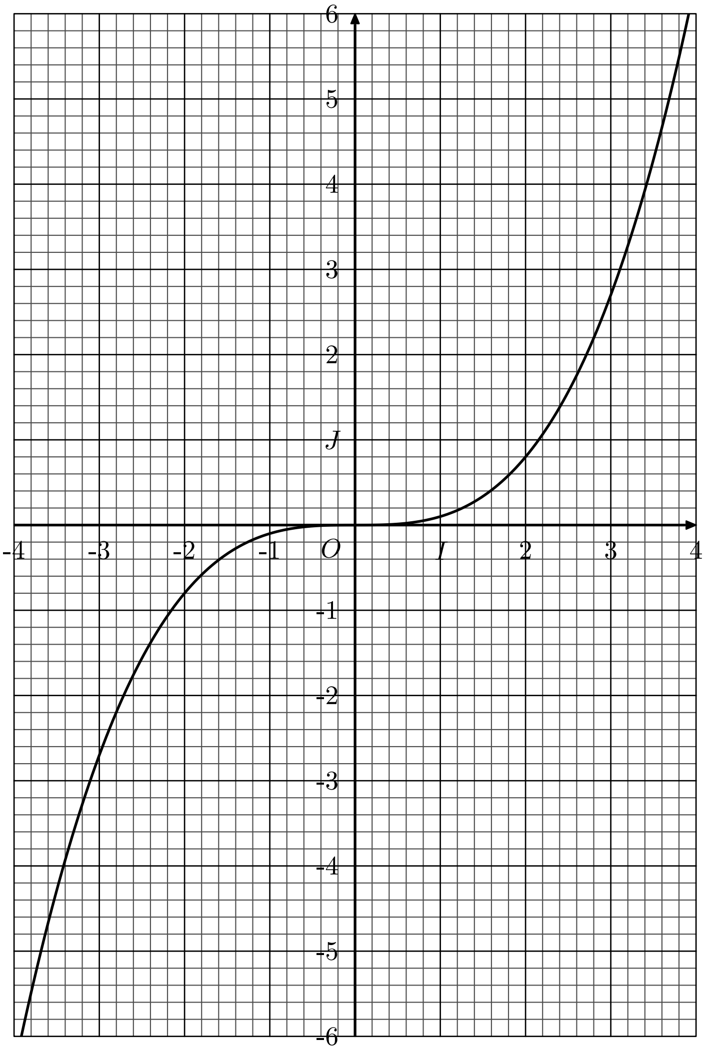
Exercice 592

On considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{10} \cdot x^3.$$

On admettra que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet en tout point d'abscisse x, une tangente.

On notera $c(x)$ le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x : c'est à dire de la tangente à $\mathscr{C}_f$ passant par le point de coordonnée $(x\,;f(x))$.



1. Compléter le tableau suivant :

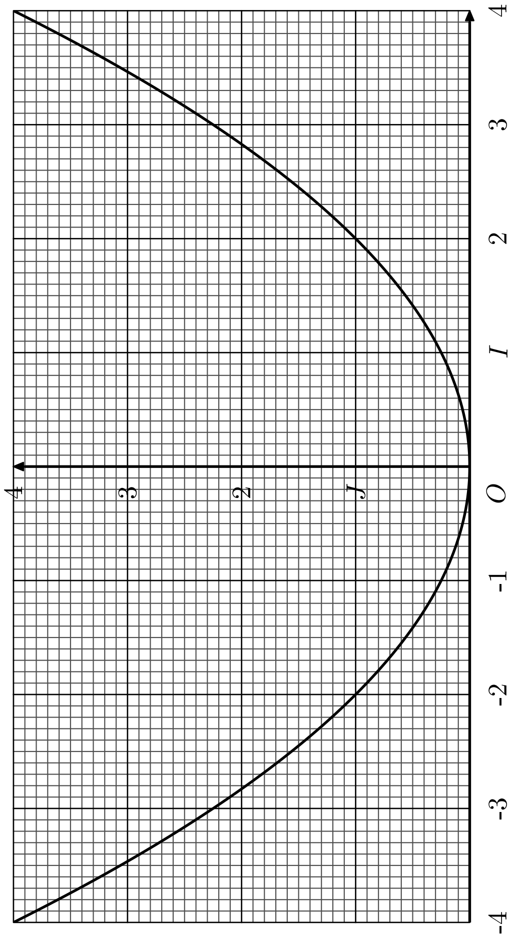
x	$-3{,}5$	-1	0	2	3
$c(x)$					

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = \frac{3}{10} \times x^2.$$
Compléter le tableau suivant :

x	$-3{,}5$	-1	0	2	3
$g(x)$					

Exercice 598

On considère la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2.$$
On admettra que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet en tout point d'abscisse x, une tangente.
On notera $c(x)$ le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x *(c'est à dire au point de coordonnée* $(x\,;f(x))$*)*



1. Pour chaque point demandé, en traçant la tangente, compléter le tableau suivant :

x	-3	-1	0	2	4
$c(x)$					

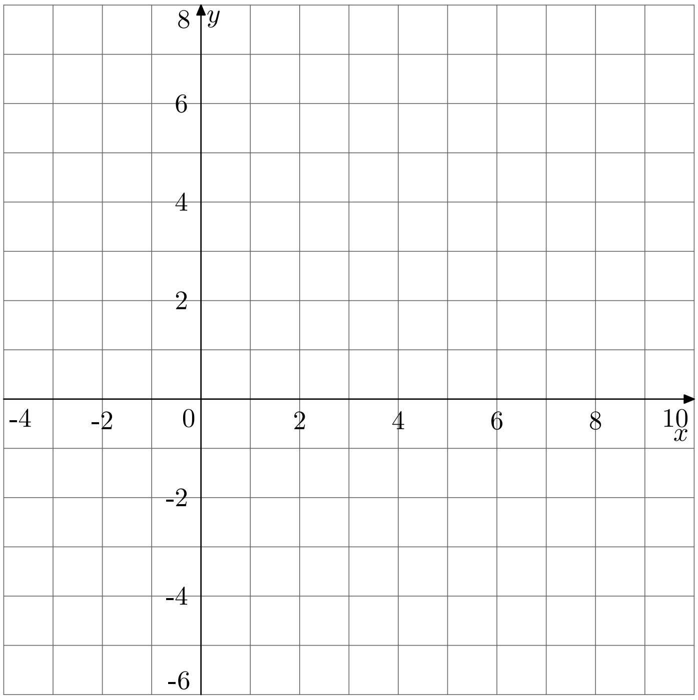
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = 0{,}5 \cdot x.$$
Compléter le tableau suivant :

x	-3	-1	0	2	4
$g(x)$					

3. Limites et fonctions homographiques :

Exercice 593

1. Dans le repère ci-dessous, tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2+x}{x-3}$.



Voici un des paradoxes de Zénon d'Elée *(500 - 430 Avant Jésus Christ)* :

> "Il n'y a point de mouvement, car il faut que le mobile arrive au milieu de son parcours avant d'atteindre la fin"

2. a. Ainsi, nous allons nous déplacer sur une droite graduée du point $A(4)$ vers le point $B(3)$: on dira que c'est un déplacement vers la gauche mais également que l'on se dirige vers 3 mais en restant avec des valeurs supérieures à 3, on notera $x \longmapsto 3^+$. En se déplaçant à la manière de Zénon d'Elée, on notera :

- u_0 l'abscisse de position initiale : c'est à dire 4 ;
- u_1 l'abscisse de la moitié du parcours restant : 3,5 ;
- u_2 l'abscisse de la moitié du parcours restant : 3,25 ;

...

Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	4	3,5	3,25					

b. Vérifier, en vous servant des fonctions et du tableau de valeurs de votre calculatrice, que la valeur de u_n peut s'exprimer **en fonction** de la valeur de n par la relation *(fonctionnelle)* suivante :

$$u_n = 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

c. Donner, pour les trois premières précision demandée dans le tableau ci-dessous, à partir de quelle valeur de n, u_n est une valeur approchée de 3 :

Précision	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-10}
Valeur de n				

d. Pour utiliser cette formule dans le tableau, nous allons la transformer :

$$\left[3+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] - 3 < 0{,}5\times10^{-10}$$

$$\left[\left[3+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] - 3\right]\times10^{10} < 0{,}5$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n\times10^{10} < 0{,}5$$

Déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant cette l'inégalité.

e. Existe-t-il un n vérifiant $u_n = 3$?
Peut-on dire qu'il existe un rang N à partir duquel u_n devienne une valeur approchée de 3 à 10^{-100} près.
On notera que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = 3$. Cela signifie que la position u_n sera aussi proche que l'on souhaite de 3, pour autant qu'on augmente la valeur n.

3. a. Montrer que : $f(x) = 1 + \dfrac{5}{x-3}$

b. Soit n un nombre entier, on pose $x = 3 + \dfrac{1}{2^n}$. Donner l'expression de $f(x)$ en fonction de n. Simplifier cette écriture.

c. Compléter le tableau suivant à l'aide des valeurs exactes :

x	4	3,5	3,25	3,125	3,0625	3,03125
$f(x)$						

d. Que peut-on dire de la valeur de $f(x)$ lorsque x s'approche de plus en plus vers 3 par la gauche. On notera cette valeur $\lim\limits_{x\mapsto3^+} f(x)$.

e. Que peut-on dire de la position relative de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $x = 3$.
On dira que la droite d'équation $x = 3$ est une asymptote verticale à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$

4. Que peut-on dire de $\lim\limits_{x\mapsto3^-} f(x)$; c'est à dire de la valeur limite de l'image de x lorsque x vers 3 par la droite *(en gardant des valeurs inférieures à 3)*.

Nous allons maintenant étudier le comportement de la fonction f lorsque x va tendre vers $+\infty$.

5. a. On considère la suite de nombre défini par $v_n = 3+2^n$. Compléter le tableau ci-dessous :

n	1	2	3	4	5
v_n					

b. Compléter le tableau suivant avec les valeurs exacte :

x	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
$f(x)$					

c. Que peut-on de la valeur de f lorsque x tend vers $+\infty$.
On notera cette valeur $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ *(la valeur limite de l'image de x par la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$)*

d. Que peut-on dire de la position relative de la courbe relativement à la droite d'équation $y = 1$? On dira que la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

e. Imaginer rapidement quel sera la valeur de $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$

Exercice 594

On appelle fonction homographique toute fonction dont l'expression algébrique est de la forme $\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}$ avec a, b, c et d des nombres réels fixés.

1. a. Pour quel valeur de x cette fonction n'est pas définie.

   b. Que pouvez-vous dire dans le cas où $c=0$ et $d=0$.

On admet la proposition suivante :

> Toute fonction homographique $x\longmapsto\dfrac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}$ peut s'écrire sous la forme $x\longmapsto\alpha+\dfrac{\beta}{c\cdot x+d}$

2. Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer son ensemble de définition, ainsi que leurs valeurs de α et β :

$$g:x\longmapsto\frac{3x+2}{x+1}\quad ;\quad h:\longmapsto\frac{x}{1-2x}$$
$$k:x\longmapsto\frac{2x-4}{5+2x}$$

3. En déduire pour chacune d'elles l'équation de leurs asymptotes horizontales et verticales.

4. Composée de fonctions :

Exercice 421

La plupart des fonctions utilisées sont des fonctions composées à partir des fonctions de référence.
La fonction $x\longmapsto\sqrt{x^2+1}$ peut être vu comme la composée de fonctions de référence de la manière suivante :

$$x\xrightarrow{f}x^2\xrightarrow{g}x^2+1\xrightarrow{h}\sqrt{x^2+1}$$

$$\text{où}\begin{cases}f:x\longmapsto x^2\\ g:x\longmapsto x+1\\ h:x\longmapsto\sqrt{x}\end{cases}$$

1. Décomposer les fonctions suivantes à l'aide des fonctions de références :

   a. $x\longmapsto 3x^2-1$ b. $x\longmapsto\dfrac{2}{3+x^2}$

   c. $x\longmapsto\sqrt{\dfrac{2}{-2x+3}}$

2. On définit a et b deux éléments de l'intervalle $[1\,;5]$ tel que $a<b$. Pour chacune des fonctions de la question 1., comparer les images des nombres a et b.

3. En analysant vos résultats de la question 1., compléter les deux phrases suivantes :
   - La composée de deux fonctions croissantes est ....
   - La composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est ....

4. Que peut-on dire du sens de variation de la somme de deux fonctions croissantes? de deux fonctions décroissantes? d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante?
   Justifier par une démonstration ou un contre-exemple chacune de vos affirmations.

Exercice 1964

Soit f une fonction dont l'image d'un nombre x est définie par :

$$f:x\longmapsto\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Décomposer cette fonction à l'aide de trois fonctions de référence.

3. Prouver la décroissance de la fonction f sur D_f.

Exercice 1761

1. Après avoir observé le sens de variation sur votre calculatrice de chacune des fonctions suivantes, appuyez votre observation au travers d'une preuve algébrique.

   a. Soit f la fonction définie par la formule :
   $f(x)=x+3$ sur $\mathbb{R}$.

   b. Soit g la fonction définie par la formule :
   $g(x)=-\dfrac{1}{4}x-1$ sur $\mathbb{R}$.

   c. Soit j la fonction définie par la formule :
   $j(x)=3(1-x)^2+2$ sur $\mathbb{R}$.

   d. Soit k la fonction définie par la formule :
   $k(x)=\sqrt{x}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.

   e. Soit l la fonction définie par la formule :
   $l(x)=\dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$

2. a. Etablir l'identitié : $x^2+2x+1=(x+1)^2$

   b. On considère la fonction m définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
   $m(x)=x^2+2x+1$.
   Etablir la stricte décroissance de la fonction m sur $]-\infty\,;-1]$.

Exercice 1758

1. Etudier le sens de variation des fontions suivantes :
   - f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $f(x)=2x-1$
   - g définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $g(x)=-2x-1$
   - h définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $h(x)=x^2$
   - k définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $k(x)=(x-1)^2-2$
   - l définie sur $\mathbb{R}^*$ par la relation : $l(x)=\dfrac{1}{x}$
   - m définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par la relation : $m(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$

2. a. Etablir la relation : $x^2-2x-1=(x-1)^2-2$

   b. Etablir le sens de variation de la fonction n définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $n(x)=x^2-2x-1$

5. Symétries de courbes :

Exercice 413

Pour chacune des fonctions suivantes, donner leurs ensembles de définition puis étudier leurs parités :

a. $f : x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$

b. $g : x \longmapsto \dfrac{|x|}{x(x^2-1)}$

c. $h : x \longmapsto 3x^2 - x + 1$

d. $j : x \longmapsto \dfrac{3}{x} \times |x|$

Exercice 423

Donner l'ensemble de définition et la parité des fonctions suivantes :

a. $f\colon x \longmapsto x(x+2)^2$

b. $g\colon x \longmapsto \sqrt{x^2-1}$

c. $h\colon x \longmapsto \dfrac{1}{(x-4)(x+4)}$

d. $j\colon x \longmapsto \dfrac{1}{2}x \cdot |x|$

Exercice 1754

On se place dans un repère orthogonal $(O;I;J)$

1. a. Soit M un point du plan de coordonnée $(x\,;y)$. Donner les coordonnées de l'image du point M par la symétrie orthogonal d'axe (OJ).

   b. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant pour tout nombre réel x :
   $f(x) = f(-x)$
   Montrer que la fonction f est paire.

2. a. Soit M un point du plan de coordonnée $(x\,;y)$. Donner les coordonnées de l'image du point M par la symétrie centrale de centre O.

   b. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant pour tout nombre réel x :
   $f(x) = -f(-x)$
   Montrer que la fonction f est impaire.

