

Seconde/Un peu plus d'algèbre

1. Comparaison de nombres :

Exercice 279



Dans une maison nouvellement construite, on veut carrelé les sols de certaines pièces.

1. Le sol de la cuisine est un rectangle de longueur $4,55\text{ m}$ et de largeur $3,85\text{ m}$.

On veut carrelé cette pièce avec des dalles carrées, sans effectuer aucune découpe ; de plus, les dimensions de ces pavés doivent être un nombre entier de centimètres.

- a. Donner la plus grande taille de pavés carrés utilisables dans cette pièces.
b. Donner toutes les tailles possibles.

2. On dispose de dalles rectangulaires de 24 cm de longueur et de 15 cm de largeur.

Quelle est la dimension de la plus petite pièce carrée qui puisse être pavé sans aucune découpe supplémentaire des dalles ?

Exercice 291



Pour n un entier naturel, $n \in \mathbb{N}$, comparer les rationnels suivants :

$$\frac{n+1}{n+2} ; \frac{n+6}{n+3} ; \frac{n+7}{n+3}$$

Exercice 293



Soit a et b deux nombres tels que $a \geq 0$ et $b \geq 0$:

1. Développer : $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$
2. Quel est le signe de : $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$
3. En déduire : $a+b \geq 2\sqrt{a \times b}$

Exercice 314



Pour x un nombre positif. Comparer les nombres :

$$\frac{x}{x+1} ; \frac{x+1}{x+2}$$

Exercice 315



1. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{2} < a < 1$, préciser quels encadrements sont vérifiés par a :

a. $\frac{1}{2} < \frac{1}{a} < 2$ b. $0 < a < 2a$ c. $\frac{1}{4} < a^2 < 4$

2. Par disjonction de cas pour $a \in]-1; 0[$ et $a \in [0; 2[$, donner un encadrement de a^2 et a^3 pour $-1 < a < 2$.

Exercice 317



On considère un carré $ABCD$ de 5 cm de côté.

1. Donner la longueur exacte des diagonales de ce carré.
2. Sachant que : $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$
Donner un encadrement de la longueur de cette diagonale.

Exercice 346



Comparer sans aide de la calculatrice les quotients suivants :

a. $\frac{5}{8}$ et $\frac{5}{9}$ b. $-\frac{7}{3}$ et $-\frac{10}{3}$

c. $\frac{6}{5}$ et $\frac{9}{5}$ d. $\frac{10}{27}$ et $\frac{10}{31}$

e. $-\frac{8}{7}$ et $-\frac{8}{-5}$ f. $\frac{\sqrt{2}}{7}$ et $\frac{\sqrt{2}}{5}$

- g. Pour n un entier supérieur ou égal à 2 :

$$\frac{n}{n+1} \text{ et } \frac{n}{n-1}$$

Exercice 308



On cherche à comparer les nombres suivants :

$$A = \frac{1202}{5949} ; B = 0,2020507648 ; C = \frac{1\,973\,152}{9\,765\,625}$$

1. Comparer ces trois nombres à l'aide de votre calculatrice.
Faites une conjecture.

2. a. A l'aide de la calculatrice, donner la valeur de 5^{10}

b. Montrer que : $C = \frac{1\,973\,152 \times 2^{10}}{10^{10}}$

- c. Quel est la nature du nombre C ?

On admettra le théorème suivant :

Une fraction $\frac{a}{b}$ irréductible est un nombre décimal si, et seulement si, son dénominateur admet une décomposition en produits de facteurs premiers de la forme $2^m \times 5^n$ avec m et n des entiers naturels.

3. a. On a : $1202 = 2 \times 601$; $5949 = 3^2 \times 661$.
Justifier que 601 et 661 sont des entiers premiers.

- b. En déduire que A est un nombre rationnel.

4. Reprendre votre conjecture de la question 1.

2. Nombres premiers :

Exercice 259



1. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers naturels suivants :

- a. 25×72 b. 54×12
c. 32×84 d. 100×98

2. Dédurre de la question 1., déterminer :

- a. Le PGCD du couple $(25 \times 72 ; 54 \times 12)$;
b. Le PPCM du couple $(32 \times 84 ; 100 \times 98)$ d'entiers naturels.

3. Utiliser un arbre de diviseurs pour déterminer l'ensemble des diviseurs de l'entier 315.

Exercice 276



1. Parmi les entiers suivants, dire s'ils sont premiers ou non. Justifier vos réponses :

- a. 903 b. 167

2. a. Déterminer la décomposition de 245 en produit de facteurs premiers.

- b. Utiliser un arbre de choix, afin de déterminer l'ensemble des diviseurs de 245.

Exercice 296



1. Soit a et b deux nombres tels que $a \geq 0$ et $b \geq 0$. Comparer les nombres :

$$\sqrt{a+b} \quad ; \quad \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

2. Quelles conditions sur a et b doit-on avoir pour que l'inégalité soit stricte?

Exercice 234



1. Décomposer les entiers 108 et 30 en facteurs premiers.

2. Mettre en avant votre démarche pour les deux questions suivantes :

- a. Simplifier la fraction $\frac{30}{108}$.
b. Effectuer la soustraction ci-dessous et donner le résultat sous forme de fraction irréductible :

$$\frac{5}{108} - \frac{7}{30}$$

Exercice 235



En utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers, donner une écriture des nombres ci-dessous sous la forme :

$$2^m \times 3^n \times \dots \quad \text{où les exposants sont des entiers relatifs.}$$

- a. $\frac{9}{24}$ b. $\frac{28^2}{32}$ c. $\frac{81 \times 6^4}{27^2 \times 7^5}$ d. $\frac{38^2 \times 11}{6^5 \times 4^4 \times 19}$

Exercice 255



1. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers des trois entiers ci-dessous :

- a. 16×25 b. 34×12 c. $72 \times 18 \times 10$
d. 32×121

2. a. Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers naturels ci-dessous :

16 et 24

b. Dédurre de la question précédente la décomposition en produit de facteurs premiers du produit ci-dessous : $16^3 \times 24^2$.

c. Dédurre, de la question a., la décomposition en produit de facteurs premiers $\frac{24^5}{16^2}$.

Exercice 282



Dans cet exercice, on utilisera la décomposition en produit de facteurs premiers pour répondre aux différentes questions :

1. Déterminer le PGCD des différents couples d'entiers :

- a. (15 ; 21) b. (18 ; 28) c. (15 ; 22)

2. Déterminer si les deux entiers 56 et 45 sont premiers entre eux

Exercice 277



1. Déterminer les décompositions en facteurs premiers des entiers suivants :

- a. 36×54 b. 125×134 c. 280×24

2. En déduire le PGCD et le PPCM du couple (6720 ; 16750) d'entiers naturels.

Exercice 1722



Un entier naturel est dit premier s'il admet comme diviseur uniquement 1 et lui-même : 3 est un entier premier car ses seuls diviseurs sont 1 et 3.

1. Parmi les entiers ci-dessous, lesquels sont premiers?
2 ; 4 ; 7 ; 12

2. Donner tous les entiers premiers de 1 à 25.

Exercice 1721



Le crible d'Eratosthène (III^{ème} siècle avant J.C.) permet de trouver facilement les entiers premiers à partir d'une liste.

1. a. Justifier que 2 est un entier premier.

b. Dans le tableau ci-dessous, hachurer toutes les cases dont l'entier est un multiple de 2 (ne pas hachurer la case "2").

2. a. Justifier que 3 est un entier premier.

b. Dans le tableau ci-dessous, hachurer toutes les cases dont l'entier est un multiple de 3 (ne pas hachurer la case "3").

3. a. La case blanche suivant la case du 3 est la case du 5 : justifier, à l'aide de cet observation, que 5 est un entier premier.

b. Hachurer toutes les cases multiples de 5, sauf la case "5".

4. a. Dans le tableau ci-dessous, quel est la case blanche succédant à "5"?

Justifier également, en se servant de l'observation du tableau, que 7 est un entier premier.

b. Hachurer tous les multiples de l'entier 7 dans le tableau (à l'exception de la case "7").

5. Continuer le travail pour hachurer dans le tableau tous les nombres entiers non-premiers présents parmi les nombres entiers de 1 à 100.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

3. Polynômes du second degré :

Exercice 600



On va s'intéresser aux polynômes du second degré : des fonctions de la forme $x \mapsto a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ avec a , b et c sont des nombres réels fixés. On admet la proposition suivante :

Toute fonction polynomiale du second degré peut s'écrire sous la forme :

$$\alpha \cdot (x + \beta)^2 + \gamma$$

Cette forme s'appelle la **forme canonique**.

Première méthode

1. a. Développer chacune des identités remarquables ci-dessous :

a. $(2x + 1)^2$

b. $(3 - 2x)^2$

c. $(3x + 7)^2$

d. $(-4x + 1)^2$

b. En déduire la forme canonique de chacune de ces polynômes du second degré :

a. $9x^2 + 42x - 5$

b. $4x^2 - 12x + 16$

c. $4x^2 + 4x - 8$

d. $16x^2 - 8x + 7$

2. En reportant cette méthode, en déduire la forme réduite de $25x^2 + 20x + 7$

Seconde méthode

Exercice 1783



Déterminer si les entiers ci-dessous sont premiers ou non. Justifier votre démarche.

a. 251

b. 623

Exercice 2468



A l'aide de la décomposition des nombres entiers en produits de facteurs premiers, donner l'écriture de chacun des nombres suivants sous la forme $p\sqrt{q}$ où $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ et où q est le plus petit possible.

a. $\sqrt{432}$

b. $\sqrt{126}$

c. $\sqrt{42}$

On s'intéresse à l'égalité :

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = \alpha \cdot (x + \beta)^2 + \gamma$$

1. Montrer que les nombres α , β et γ doivent vérifier le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha = a \\ 2 \cdot \alpha \cdot \beta = b \\ \gamma + \alpha \cdot \beta^2 = c \end{cases}$$

On admettra que pour toute valeur du triplet $(a; b; c)$, le système précédent admet une unique solution.

2. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les valeurs de α , β et γ :

$a : x \mapsto x^2 + 8x - 9$; $b : x \mapsto 2x^2 + 12x + 4$

$c : x \mapsto 6x^2 + 6x + 7$; $d : x \mapsto -2x^2 + 3x - 4$

Question subsidiaire

1. Montrer que pour tout nombre a , b et c tel que $a \neq 0$, on a :

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

2. Que pouvez-vous dire de l'équation $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ si $b^2 - 4ac < 0$

3. On admet le fait que :

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot \left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$$

Donner les deux solutions de l'équation $2x^2 + 4x + 1 = 0$

Exercice 2009



On s'intéresse aux équations de la forme :

$$(E) : (x + \beta)^2 - \gamma = 0$$

- Factoriser : $(x + 2)^2 - 9$.
 - Résoudre l'équation suivante : $(x + 2)^2 - 9 = 0$.
- Pour chacune des équations suivantes, donner l'ensemble des solutions :
 - $(x - 7)^2 - 3 = 0$
 - $(x + 1)^2 + 2 = 0$
 - $(x - 8)^2 = 0$

3. Quelle condition doit vérifier γ pour que :

- (E) admette deux solutions ;
- (E) admette une unique solution ;
- (E) n'admette aucune solution.

Exercice 2010



1. Etablir l'identité suivante :

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \right]$$

Cette question permet d'affirmer que tout polynôme du second degré $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ admet une écriture de la forme $a \left[(x + \beta)^2 - \gamma \right]$. Cette dernière forme s'appelle la forme canonique d'un polynôme du second degré.

- Justifier que l'expression :

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \right] = 0$$
 admette aucun solution, une solution, deux solutions suivant la valeur de $b^2 - 4ac$?
 - Pour chacune des équations ci-dessous, décrire l'ensemble des solutions : c'est à dire s'il est vide ou le nombre d'éléments le constituant :

$$(E) : 4x^2 - 5x + 4 \quad (F) : 2x^2 - x - 1$$

$$(G) : 9x^2 - 24x + 16$$

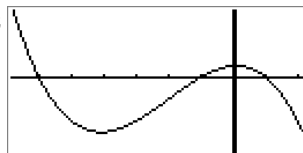
4. Calculatrice et polynôme :

Exercice 4635



On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x réel est définie par la relation :

$$f(x) = -2x^3 - 12x^2 + 2x + 12$$



La représentation de cette fonction est donnée dans la capture d'écran ci-contre d'une calculatrice.

Parmi les expressions suivantes, une seule représente la forme

L'ensemble des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe de $b^2 - 4ac$. On appelle discriminant du polynôme $ax^2 + bx + c$ le nombre noté Δ valant :

$$\Delta = b^2 - 4a \cdot c.$$

Relativement à la question précédente, on en déduit qu'une équation du second degré admet comme ensemble de solution :

- l'ensemble vide si $\Delta < 0$,
- un ensemble à un élément si $\Delta = 0$,
- un ensemble à deux éléments distincts si $\Delta > 0$.

3. On considère une polynôme du second degré ayant un discriminant strictement positif : $\Delta = b^2 - 4a \cdot c > 0$

- Factoriser l'expression : $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \Delta$

- En déduire que l'équation du second degré :

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

admet pour solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

4. On considère l'équation (H) : $2x^2 + 2x - 12 = 0$

- Déterminer le discriminant du polynôme $2x^2 + 2x - 12$. Combien de solution admet l'équation (H) ?
- Par application directe de la question 3. b., prouver que l'équation (H) admet pour ensemble de solution $\{-3; 2\}$

Exercice 3079



On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{-2}{\sqrt{x^2 - x - 6}}$$

- Factoriser l'expression : $\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{25}{4}$
 - Justifier l'égalité suivante : $f(x) = \frac{-2}{\sqrt{(x-3)(x+2)}}$
- Etablir le tableau de signe de l'expression : $(x - 3)(x + 2)$.
 - Déterminer l'ensemble définition de la fonction f .
- En déduire, sur l'intervalle $]3; +\infty[$, la monotonie de la fonction f .

factorisée de ce polynôme. Laquelle?

- $2(x - 1)(x + 1)(x - 6)$
- $2(x - 1)(x + 1)(x + 6)$
- $2(1 - x)(x + 1)(x + 6)$
- $2(1 - x)(x + 1)(x - 6)$

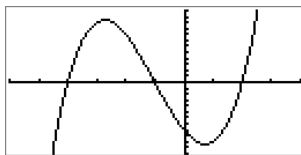
Vérifier votre réponse.

Exercice 4634



On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x réel est définie par la relation :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$$



La représentation de cette fonction est donnée dans la capture d'écran ci-contre d'une calculatrice.

Parmi les expressions suivantes, une seule représente la forme factorisée de ce polynôme. Laquelle?

- a. $(x+2)(x-1)(x-4)$ b. $(x-2)(x+1)(x+4)$
 c. $(x-1)(x-2)(x+4)$ d. $(x+4)(x-1)(x+2)$

Vérifier votre réponse.

Exercice 4636

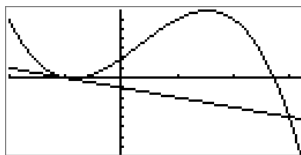


1. On considère les deux fonction

f définies par :

$$f(x) = -x^3 + x^2 + 4x + 2$$

$$g(x) = -x - 1$$



Les représentation de ces deux fonctions sont données dans la capture d'écran ci-contre d'une calculatrice.

- a. Utiliser votre calculatrice pour décrire l'ensemble des solutions de l'équation :
 $f(x) = g(x)$

- b. Pour chacune des deux égalités ci-dessous, déterminer les valeurs des réels α , β et γ réalisant ces égalités :
- $-x^3 + x^2 + 5x + 3 = (x+1)(\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma)$
 - $-x^3 + x^2 + 5x + 3 = (x-3)(\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma)$

- c. A l'aide de la question précédente, affirmer la conjecture de la question a).

2. On considère les deux fonctions f et g définies par :

$$f(x) = 2x^3 - 5x + 6 \quad ; \quad g(x) = x + 2$$

Suivre la démarche de la question précédente pour déterminer l'ensemble des solutions de l'équation :

$$f(x) = g(x)$$

Exercice 4633



1. A l'aide de la calculatrice, conjecturer la forme factorisée des polynômes suivants :

a. $x^3 + 3x^2 - 6x - 8$

b. $x^3 - 3x^2 - x + 3$

c. $-x^3 - x^2 + 4x + 4$

d. $3x^2 - 6x^2 - 3x + 6$

e. $4x^3 + 8x^2 - 4x - 8$

f. $-2x^3 + 4x^2 + 6x$

2. Vérifier algébriquement vos conjectures de la question précédente.

Exercice 4639



Résoudre les inéquations suivantes :

a. $x^3 - 4x^2 + x + 6 < 0$

b. $2x^3 + 4x^2 - 6x \geq 0$

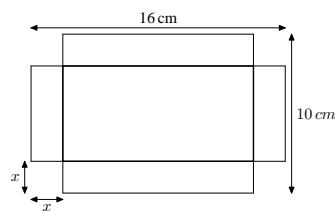
c. $-2x^3 - 4x^2 + 2x + 4 > 0$

d. $2x^3 + 2x^2 - 2x - 2 \leq 0$

Exercice 4638



On veut réaliser, dans le patron ci-dessous une boîte rectangulaire sans couvercle. Les longueurs sont exprimées en cm .



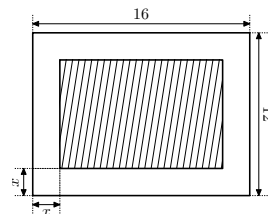
Déduire la ou les valeurs de x pour lesquelles cette boîte possède une aire de 144 cm^2 .

Exercice 4637



Sur un ancien terrain vague de forme rectangulaire de longueur 16 m et 12 m , la municipalité souhaite construire un jardin d'enfants avec une allée faisant le tour l'aire de jeu :

L'aire de jeu est représentée ci-dessous par la partie hachurée :



Quel(s) dimension(s) peut avoir la largeur de l'allée afin que l'aire de jeu soit la même que celle de l'allée.

255. Exercices non-classés :

Exercice 6786



1. Vérifier que : $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$

2. Existe-t-il d'autres séries de 5 entiers naturels consécutifs tels que la somme des carrés des deux plus grands soit égale à la somme des carrés des plus petits?