Première S/Vecteurs et repères

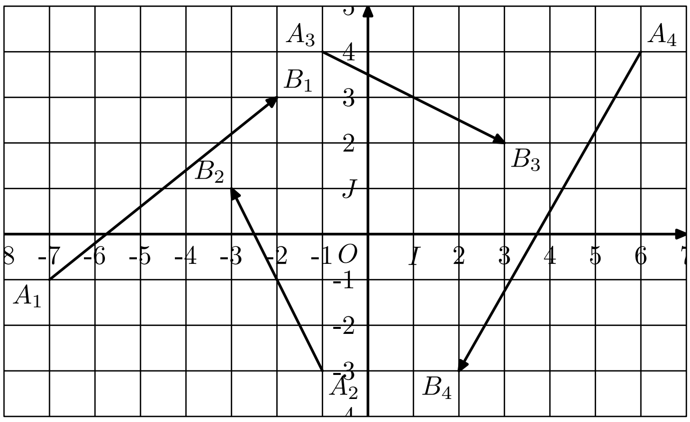
1. Rappels :

Exercice 6486

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$. On considère les points A et B de coordonnées :
$A(x_A\,;y_A)$; $B(x_B\,;y_B)$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont : $\overrightarrow{AB}\big(x_B-x_A\,;y_B-y_A\big)$

Dans le repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous, sont représentés quatres vecteurs :



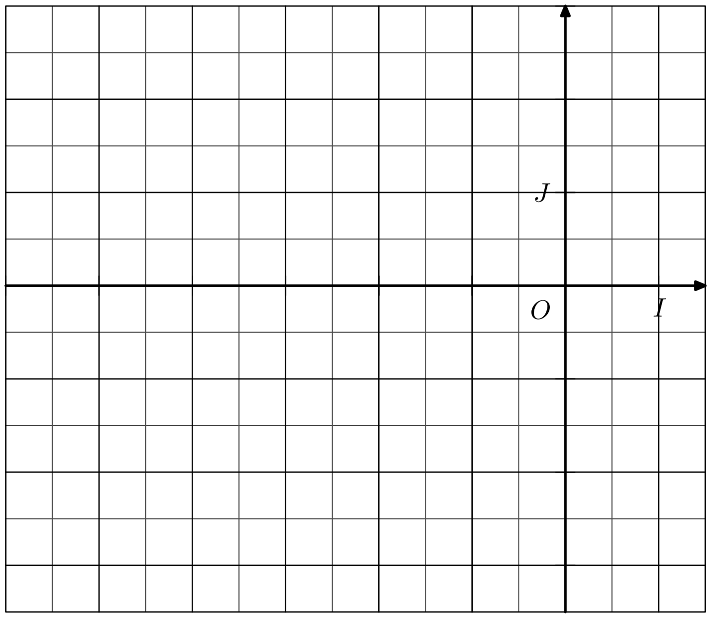
Graphiquement, déterminer les coordonnées de ces quatres vecteurs.

Exercice 6481

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$. On considère les points A et B de coordonnées :
$A(x_A\,;y_A)$; $B(x_B\,;y_B)$.

- La distance AB est définie par :
  $$AB=\sqrt{\big(x_B-x_A\big)^2+\big(y_B-y_A\big)^2}$$
- Notons I le milieu du segment $[AB]$. Le point I a pour coordonnées :
  $$I\Big(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\Big)$$

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère les deux points suivants :
$A\big(-4\,;-2\big)$; $B(-1\,;2)$



1. Placer les points A et B.

Le graphique sera complété au fur et à mesure des questions l'exercice.

2. On note K le milieu du segment $[AB]$. Montrer que le point K a pour coordonnées : $K(-2{,}5\,;0)$.
3. On considère le point C de coordonnées $\big(-2{,}5\ ;-2{,}5\big)$.
   a. Déterminer les longueurs AB et KC.
   b. Que représente le segment $[KC]$ pour le triangle ABC?
   c. En déduire que le triangle ABC est rectangle en C.

Exercice 7146

Propriétés caractérisantes du parallélogramme :

Soit $ABCD$ un quadrilatère.

- Si les diagonales de $ABCD$ se coupent en leurs milieux alors $ABCD$ est un parallélogramme.
- Si les côtés opposés de $ABCD$ sont parallèles deux à deux alors $ABCD$ est un parallélogramme.
- Si les côtés opposés de $ABCD$ sont de même longueur alors $ABCD$ est un parallélogramme.
- Si deux des côtés opposés sont parallèles et de même longueur alors $ABCD$ est un parallélogramme.

On considère les quatre points suivants caractérisés par leurs coordonnées dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :

$$A(2\,;3) \quad ; \quad B(-2\,;1) \quad ; \quad C(-4\,;-3) \quad ; \quad D(0\,;-1)$$

Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 6482

Propriété caractérisante du rectangle :

Soit $ABCD$ un quadrilatère :

- Si $ABCD$ possède trois angles droits alors $ABCD$ est un rectangle.

Soit $ABCD$ un parallélogramme :

- Si $ABCD$ a ses diagonales de même longueur alors $ABCD$ est un rectangle.
- Si $ABCD$ a un angle droit alors $ABCD$ est un rectangle.

On considère les quatre points suivants caractérisés par leurs coordonnées dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :

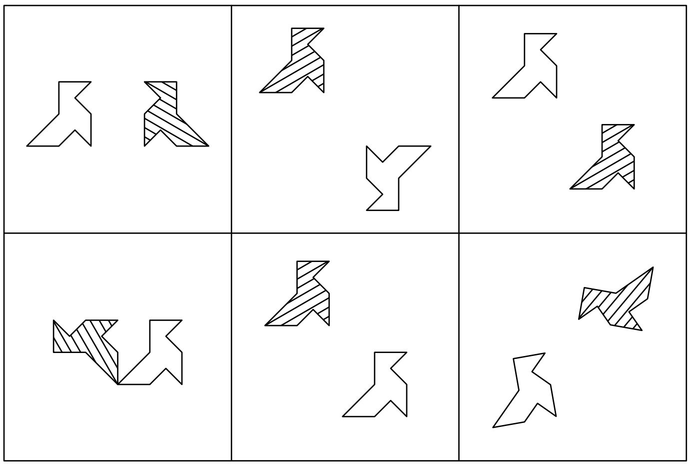
$$A(-4\,;-1) \quad ; \quad B(-3\,;-4) \quad ; \quad C(3\,;-2) \quad ; \quad D(2\,;1)$$

Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

Exercice 6484

La figure hachurée est obtenue après application d'une transformation du plan à la figure blanche. Dans chaque cas :

- Préciser le type de transformation *(symétrie axiale, centrale, translation, rotation)*.
- Faire apparaître et préciser le*(s)* élément*(s)* caractéristique*(s)* de cette transformation *(axe, centre, angle, sens de rotation)*

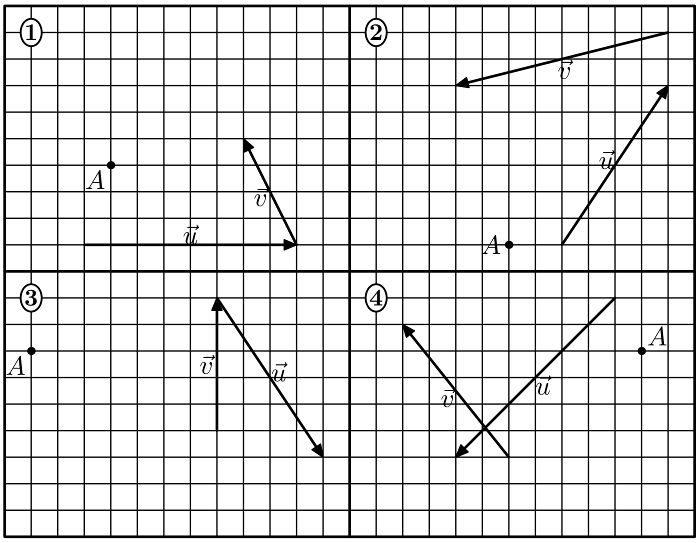


Exercice 6485

1. Pour chacun des quadrans ci-dessous :
   a. Placer le point B translaté du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.
   b. Tracer le point C translaté du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.

   Dans chaque cadran, le point C obtenu s'appelle le translaté du point A par le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$.

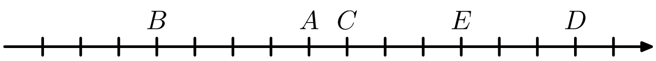
2. Dans le premier quadran :
   a. Placer le point B' translaté du point A par le vecteur $\overrightarrow{v}$.
   b. Placer le point C' translaté du point B' par le vecteur $\overrightarrow{u}$.
   c. Que pouvez-vous dire de la translation composé des translations de vecteurs $\overrightarrow{u}$ puis celle de $\overrightarrow{v}$ et de la translation composée des translations de vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\vec{u}$?



2. Vecteurs colinéaires : proportionnalités :

Exercice 5287

Sur une droite graduée, on place les points A, B, C, D, E :



Pour chaque question, déterminer la valeur du nombre k vérifiant l'égalité :

a. $\overrightarrow{BC} = k\cdot\overrightarrow{AC}$ b. $\overrightarrow{ED} = k\cdot\overrightarrow{AC}$

c. $\overrightarrow{AC} = k\cdot\overrightarrow{CA}$ d. $\overrightarrow{ED} = k\cdot\overrightarrow{CA}$

e. $\overrightarrow{EA} = k\cdot\overrightarrow{AB}$ f. $\overrightarrow{AC} = k\cdot\overrightarrow{BA}$

Exercice 5295

Pour chaque question, préciser si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et, le cas échéant, donner le coefficient de colinéarité du vecteur $\vec{u}$ par rapport au vecteur $\vec{v}$:

a. $\vec{u}(-2\,;-10)$ et $\vec{v}(4\,;20)$
b. $\vec{u}(-6\,;9)$ et $\vec{v}\left(\dfrac{1}{4}\,;-\dfrac{1}{2}\right)$

c. $\vec{u}(0\,;5)$ et $\vec{v}(-5\,;0)$
d. $\vec{u}\left(-\dfrac{4}{3}\,;4\right)$ et $\vec{v}(3\,;-9)$

e. $\vec{u}\left(\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{2}{5}\right)$ et $\vec{v}(5\,;6)$
f. $\vec{u}(6\,;-5)$ et $\vec{v}\left(\dfrac{14}{5}\,;-2\right)$

3. Propriétés de colinéarité :

Exercice 5288

Dans un un repere $(O;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$, on considère les points :

$$A(3\,;-5) \quad ; \quad B(1\,;-1) \quad ; \quad C(13\,;2) \quad ; \quad D(18\,;-8)$$

Etablir que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 5313

On considère le plan muni du repère $\big(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,\big)$ représenté ci-dessous :

On considère les quatre vecteurs ci-dessous :

$$\vec{u}\left(\frac{9}{4}\,;-\frac{3}{4}\right) \quad ; \quad \vec{v}\left(\frac{7}{2}\,;-\frac{3}{2}\right) \quad ; \quad \vec{w}\left(-\frac{15}{4}\,;\frac{5}{4}\right)$$

1. Représenter les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ avec pour origine le point O.

2. a. Graphiquement, émettre une conjecture sur la colinéarité de couples de vecteurs parmi $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

   b. Etablir votre conjecture.

Exercice 5293

Soit A, B, C et D quatre points du plan. Dans chaque cas, démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, vérifiant la relation imposée, sont colinéaires :

a. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$
b. $5\cdot\overrightarrow{AD}=2\cdot\overrightarrow{AC}+3\cdot\overrightarrow{BD}$

c. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+2\cdot\overrightarrow{CB}=\vec{0}$
d. $3\cdot\overrightarrow{AD}+4\cdot\overrightarrow{BC}=7\cdot\overrightarrow{AC}$

4. Recherche des coordonnées de points :

Exercice 5291

On considère le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$.
Soit A, B, C et D quatre points du plan de coordonnées :

$$A(-5\,;1) \quad ; \quad B(2\,;4) \quad ; \quad C(-1\,;-2) \quad ; \quad D(3\,;y_D)$$

Déterminer les coordonnées du point D tel que les droites (AB) et (CD) soient parallèles et que le point D ait 3 pour abscisse.

Exercice 5822

Dans le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé, on considère les trois points suivants :

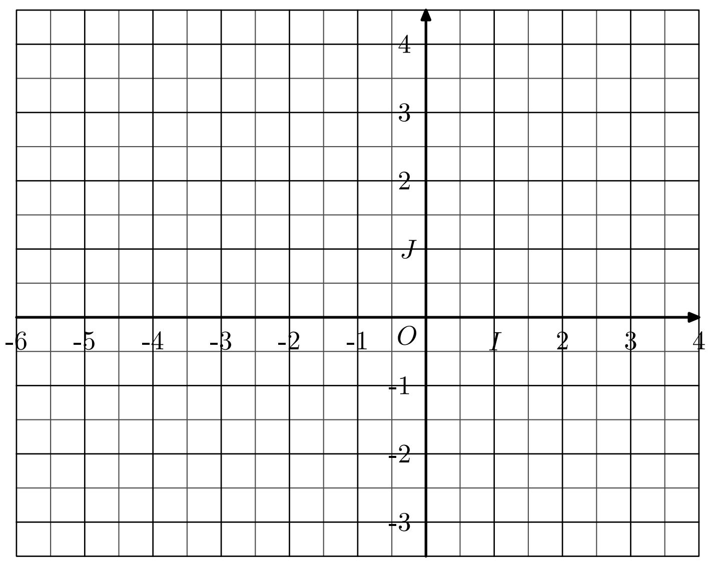
$$A(-1\,;1) \quad ; \quad B(-3\,;-1) \quad ; \quad C(2\,;3)$$

1. Les points A, B et C sont-ils alignés? Justifier votre réponse.

2. Déterminer les coordonnées de l'unique point D ayant pour abscisse -2 tel que les droites (AB) et (CD) soient parallèles.

Exercice 5292

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$:



1. Placer les trois points A, B, C dans le repère ci-dessous :

$$A(3\,;-3) \quad ; \quad B(-4\,;3) \quad ; \quad C(-5\,;-1)$$

2. Déterminer les coordonnées du milieu M du segment $[AB]$.

3. a. Déterminer les longueurs AB et MC

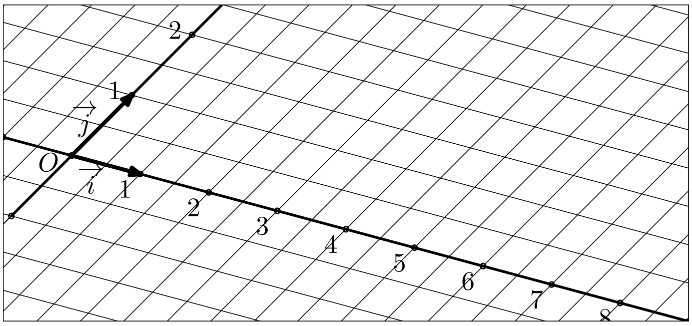
   b. Etablir que le triangle ABC est rectangle en C.

4. Soit N un point de l'axe des ordonnées. Déterminer les coordonnées du point N afin que les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{CM}$ soient colinéaires.

5. Repères quelconques :

Exercice 4968

On munit le plan d'un repère $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\right)$ quelconque représenté ci-dessous :



1. a. Dans le repère ci-dessous, placer les deux points : $A(-1\,;2)$; $B(4\,;1)$

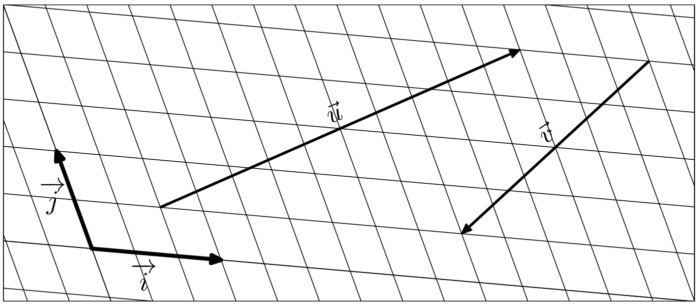
   b. Justifier graphiquement que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(\,5\,;-1\,)$.

2. On considère les deux vecteurs suivants :
   $\overrightarrow{u}\,(3\,;2)$; $\overrightarrow{v}\,(\,-2\,;-2\,)$

   Donner un représentant de votre choix de chacun de ces deux vecteurs dans le repère ci-dessus.

Exercice 5744

Dans le plan, on considère les deux vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ non-colinéaire représentés ci-dessous :



La représentation des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont également représentés ci-dessus.

1. Dans la base vectorielle de $\left(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\right)$, donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

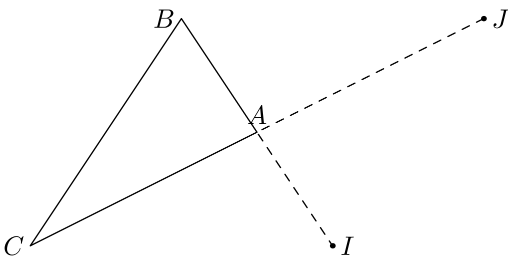
2. Par la méthode de votre choix, déterminer les coordonnées du vecteur somme : $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$.

3. Par la méthode de votre choix, déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{t}$ réalisant l'égalité suivante :
   $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{t}$

6. Décomposition de vecteurs :

Exercice 5290

Dans le plan, on considère le triangle quelconque ABC. On note respectivement I et J les symétriques respectifs de B et de C par rapport à A :



Exprimer en fonctions des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ les vecteurs suivants :

a. $\overrightarrow{IA}$	b. $\overrightarrow{AJ}$	c. $\overrightarrow{BC}$
d. $\overrightarrow{CB}$	e. $\overrightarrow{IJ}$	f. $\overrightarrow{IC}$

Exercice 5294

Considérons un triangle ABC et M un point appartenant au côté $[AB]$ vérifiant la relation : $AM=\dfrac{2}{3}\cdot AB$

P est le point d'intersection de la droite (BC) et de la parallèle à (AC) passant par le point M. N est le point d'intersection des droites (AC) et de la parallèle à (AB) passant par le point P

1. Réaliser une représentation de cette configuration.

2. Montrer que : $AN=\dfrac{1}{3}\cdot AC$; $CP=\dfrac{2}{3}\cdot CB$.

3. Décomposer les vecteurs ci-dessous en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

   a. $\overrightarrow{AP}$ b. $\overrightarrow{MC}$

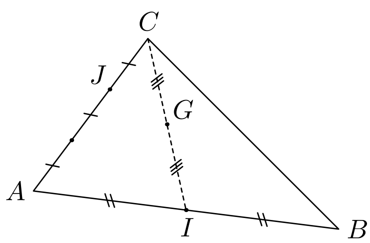
4. Décomposer les vecteurs ci-dessous en fonction des vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$:

   a. $\overrightarrow{AP}$ b. $\overrightarrow{NM}$

Exercice 5393

On considère le triangle ci-contre où I et G sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CI]$, le point J est définie par la relation :

$$\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{CA}$$



On munit le plan du repère $(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$.

1. Donner les coordonnées des points I et J.
2. Etablir que le point G a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}\right)$. Justifier votre réponse.
3. En déduire l'alignement des points B, G, J.

Exercice 5343

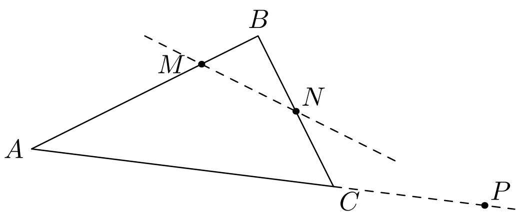
Dans le plan, on considère un triangle ABC non-aplati. On considère les trois points M, N et P définis par :

$$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{BA} \quad ; \quad \overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{AP}=2\cdot\overrightarrow{AC}$$

Montrer que les points M, N et P sont alignés.

Exercice 5342

Dans le plan, on considère le triangle ABC :



On considère les points M et N définis par :

$$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{BA} \quad ; \quad \overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}$$

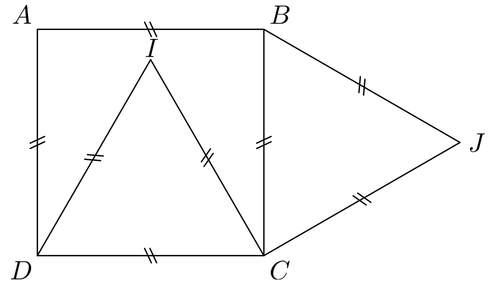
On définit le point P par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AP}=\alpha\cdot\overrightarrow{AC} \quad \text{où } \alpha\in\mathbb{R}$$

1. Exprimer $\overrightarrow{AC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. On munit le plan du repère $(B\,;\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC})$:
   a. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ et du vecteur $\overrightarrow{MP}$ en fonction du réel α.
   b. Déterminer la valeur de α afin que les points M, N et P sont alignés.

Exercice 5394

On considère la figure ci-dessus composée d'un carrée $ABCD$ et de deux triangles équilatéral DIC et BJC :



Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

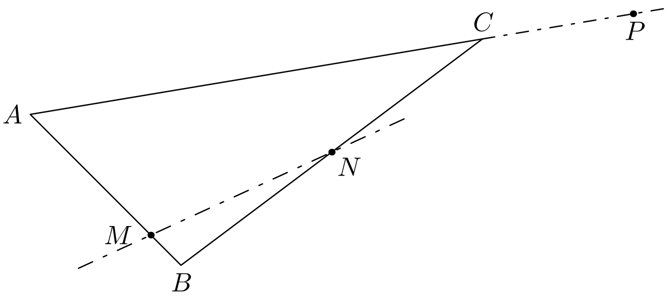
Démontrer que les points A, I, J sont alignés.

(Dans un triangle équilatéral de côté a, on admet que toutes ses hauteurs ont pour longueur $\frac{a\sqrt{3}}{2}$).

255. Exercices non-classés :

Exercice 6664

Dans le plan, on considère le triangle ABC représenté ci-dessous :



Les points M, N et P sont définis par les relations :

$$\overrightarrow{AM}=\frac{4}{5}\cdot\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{AP}=\frac{4}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$$

L'étude s'effectuera dans le repère $(B\,;\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC})$.

1. Donner les coordonnées des points M et N.
2. a. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   b. En déduire les coordonnées du point P.
3. Justifier que les points M, N et P sont alignés.

