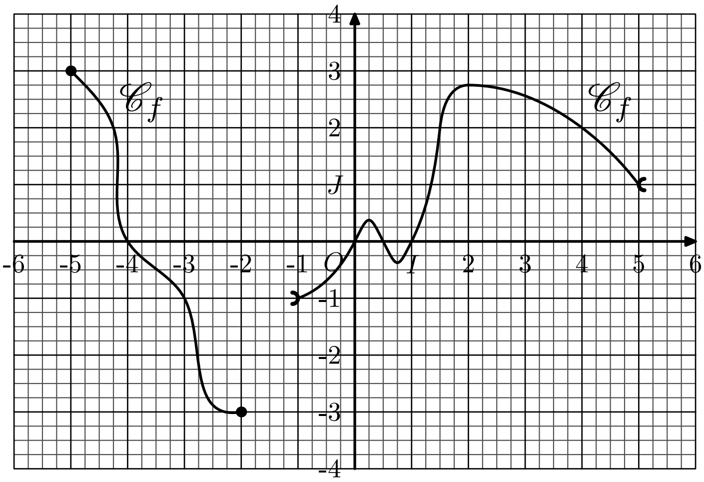
Compiler exercice | Compiler correction | Plus d'option

Première S/Etudes de fonctions

1. Rappels - généralités :

Exercice 532

On munit le plan du repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé. Ci-dessous est représentée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer, graphiquement, l'image des nombres suivants par la fonction f :

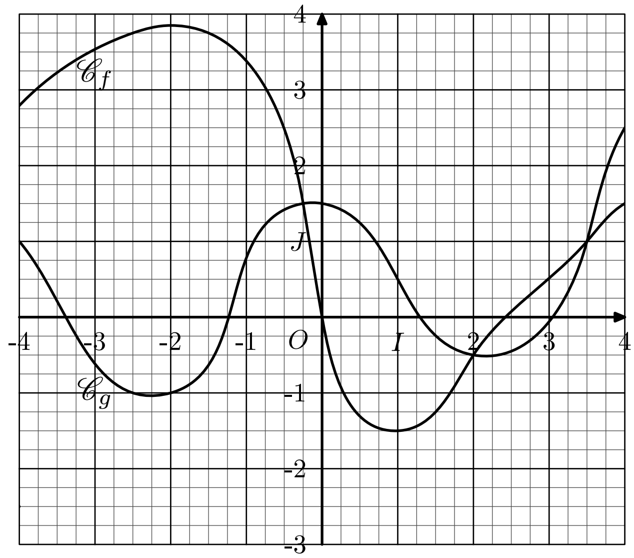
   a. -3 b. 1 c. 2

3. Déterminer, graphiquement, l'ensemble des antécédents du nombre de 2 par la fonction f.
4. a. Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \geqslant 2$.

   b. Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) < 0$.

Exercice 2142

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-4\,;4]$:



On considère l'inéquation : $f(x) < g(x)$

1. Parmi les nombres ci-dessous, lesquels sont solutions de cette inéquation :

   a. $-2{,}5$ b. $-0{,}25$ c. 1

2. Résoudre graphiquement cette inéquation.

Exercice 2196

On considère la fonction f dont voici le tableau de variations :

x	-3		0		2		5
Variation de f	‖ $+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	-1

1. Dire si les assertions suivantes sont vraies, fausses ou indécidables. Dans chaque cas, justifier votre affirmation :

   a. $\mathcal{D}_f = [-2\,;+\infty[$

   b. Le nombre 2, par la fonction f, n'admet qu'un antécédent.

   c. f est bornée sur son ensemble de définition.

   d. L'image de 4 est un nombre négatif.

2. On donne les informations suivantes à propos de la fonction f : l'image de -1 *(resp. 3)* par la fonction f est 3

(resp. 0).

Donner, sans justification, l'image des intervalles ci-dessous par la fonction f :

a. $[0\,;5]$ b. $[-1\,;2]$ c. $]-3\,;3[$

Exercice 730

1. On considère les trois fonctions f, g, h définies par :

$$f : x \longmapsto \frac{x^2-3x+2}{2x} \quad ; \quad g : x \longmapsto 2^x$$
$$h : x \longmapsto \sqrt{x+\sqrt{7x-3}} \quad ; \quad j : x \longmapsto \frac{(6x-3)^2}{-36x^2+36x-9}$$

Déterminer les images du nombre 4 respectivement par les fonctions f, g, h et j.

2. On considère les deux fonctions k, ℓ définies par :

$$k : x \longmapsto 4x-5 \quad ; \quad \ell : x \longmapsto 9x^2-6x$$

a. Déterminer l'ensemble des antécédents du nombre $\frac{1}{2}$ par la fonction k.

b. Déterminer l'ensemble des antécédents du nombre -1 par la fonction ℓ. *(on pensera à une factorisation).*

Exercice 2696

1. Ci-dessous sont présentées trois fonctions dont l'expression a été saisie sur une calculatrice :

a. `Y1=√(1+√(3-X))÷√X+3`

b. `Y2=(3X-2)÷(2√X+1)`

c. `Y3=√(3+X)(2-X)`

Ré-écrire sur votre copie ces trois fonctions avec la présentation habituelle des expressions mathématiques.

2. Pour chacune des fonctions ci-dessous, écrire les caractères à saisir dans une calculatrice pour les insérer :

a. $f : x \mapsto \dfrac{1+\dfrac{3+x}{x}}{2-3x}$

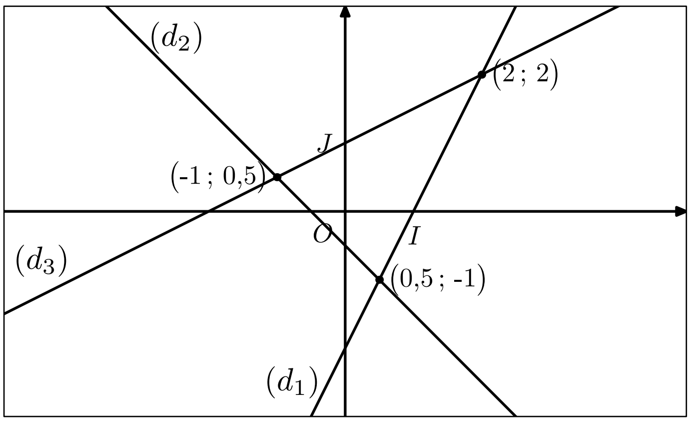
b. $f : x \mapsto \sqrt{(1-2x)\times(3x-1)}$

c. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+1}$

2. Rappels - fonction affines :

Exercice 2690

On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé. On considère les trois droites (d_1), (d_2) et (d_3) représentées ci-dessous :

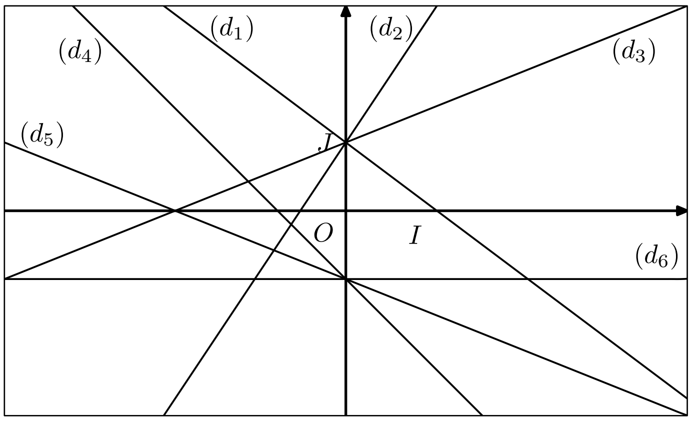


Les coordonnées des points d'intersection de ces droites sont données sur la représentation.

Déterminer les équations réduites de ces trois droites.

Exercice 2691

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère les six droites représentées ci-dessous :



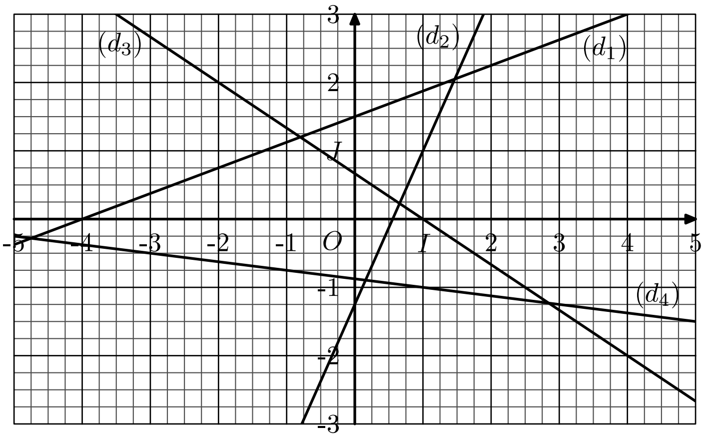
Chaque droite est la représentation de l'une des six fonctions suivantes :

$$f\colon x \longmapsto \frac{3}{2}\cdot x+1 \quad ; \quad g\colon x \longmapsto -x-1 \quad ; \quad h\colon x \longmapsto \frac{2}{5}\cdot x+1$$
$$j\colon x \longmapsto -\frac{2}{5}\cdot x-1 \quad ; \quad k\colon x \longmapsto -\frac{3}{4}\cdot x+1 \quad ; \quad \ell\colon x \longmapsto -1$$

Associer, par des raisonnements et sans calculs, la courbe représentation à chaque fonction.

Exercice 2192

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les quatre droites représentées ci-dessous :



Déterminer les équations réduites de ces quatre droites.

Exercice 7866

On définit deux fonctions f, g affines par les relation :

$f(x) = 3x+4 \quad ; \quad g(x) = -x+2$

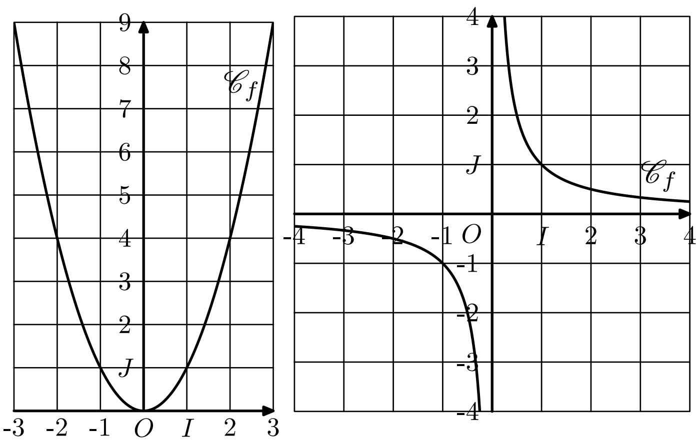
On s'aidera du sens de variation de ces deux fonctions pour répondre aux questions suivantes :

1. Détemriner les images de l'intervalle $[-2\,;5]$ par chacune des fonctions f et g.
2. Déterminer l'intervalle I tel que son image par f soit $\mathbb{R}_+$; c'est à dire vérifiant la relation : $f(I) = \mathbb{R}_+$
3. Déterminer l'intervalle J tel que son image par g soit $\mathbb{R}_+$; c'est à dire vérifiant la relation : $g(J) = \mathbb{R}_+$

3. Rappels - fonctions carrées et inverses :

Exercice 2692

Dans des repère $(O\,;I\,;J)$ orthormaux, sont données ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives respectivement de la fonction carrée et de la fonction inverse :



Compléter, sans justification, les assertions suivantes :

1. Si $x \in [1\,;3[$ alors $x^2 \in \ldots\ldots$
2. Si $x \in]-1\,;2]$ alors $x^2 \in \ldots\ldots$
3. Si $x \in]2\,;4]$ alors $\dfrac{1}{x} \in \ldots\ldots$
4. Si $x \in]0\,;2]$ alors $\dfrac{1}{x} \in \ldots\ldots$
5. Si $x \in \left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right]$ alors $\dfrac{1}{x} \in \ldots\ldots$

Exercice 4976

Pour chacune des fonctions, déterminer les caractéristiques de leur extrémum et dresser le tableau de variations :

a. $f : x \longmapsto 2x^2+8x+1$ b. $g : x \longmapsto -x^2+2x+1$

c. $h : x \longmapsto x^2+4x+4$ d. $j : x \longmapsto -3x^2+9x-2$

e. $k : x \longmapsto 3x^2+2x+2$ f. $\ell : x \longmapsto -x^2+2\sqrt{3}x-1$

Exercice 4975

Soit x un nombre réel ayant pour encadrement $-1 < x \leqslant 3$. Pour chaque question, déterminer un encadrement de l'expression littérale proposée :

a. $3x+1$ b. $-2x-5$ c. $\dfrac{1}{x+2}$

d. $(x+1)^2+1$ e. $\dfrac{1}{x^2+1}$ f. $\dfrac{2}{(x-1)^2+1}$

Exercice 7375

Soit x un nombre réel vérifiant l'encadrement $2 \leqslant x < 5$. Pour chaque question, déterminer un encadrement de l'expression littérale proposée :

a. $(1-x)^2$ b. $\dfrac{3}{2\cdot x-3}$ c. $(x-4)^2$

Exercice 7862

On considère la fonction f définie par : $f : x \longmapsto \dfrac{3x+1}{x-3}$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$, on a :
$$\frac{3x+1}{x-3} = 3 + \frac{10}{x-3}$$
2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;3[$.

Exercice 4984

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ par la relation :
$$f(x) = \frac{8x-11}{2x-3}$$
   a. Déterminer les réels a et b réalisant l'identité :
$$f(x) = a + \frac{b}{2x-3}$$
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par :
$$g(x) = \frac{x+1}{2-x}$$
   a. Déterminer les réels a et b réalisant l'identité :
$$g(x) = a + \frac{b}{2-x}$$
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction g

Exercice 6573

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression :
$$f(x) = \frac{2{\cdot}x^2+4{\cdot}x+1}{x^2+2{\cdot}x+2}$$

1. Déterminer les deux réels a et b vérifiant l'identité :
$$f(x) = a + \frac{b}{\big(x+1\big)^2+1}$$

2. a. Déterminer le sens de variations de la fonction f sur l'intervalle $\big[-1\,;+\infty\big[$.

b. Démontrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $\big]-\infty\,;-1\big]$.

Exercice 5029

1. Soit a et b deux nombres réels. Etablir l'identité suivante :
$$a^3-b^3 = \big(a-b\big)\cdot\big(a^2+a{\cdot}b+b^2\big)$$

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est définie par :
$$f(x) = x^3$$
Etablir que la fonction f est croissante sur $\big]-\infty\,;0\big]$.

4. Racine carré - étude de fonctions :

Exercice 4972

Sans justification, répondre aux questions suivantes :

1. Résoudre l'inéquation : $\sqrt{x}>4$

2. Résoudre l'inéquation : $\sqrt{x}<9$

Exercice 4973

Soit f la fonction dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :
$$f(x) = -2\sqrt{x+1}+3$$

1. Justifier que l'ensemble de définition de la fonction f est :
$$\mathcal{D}_f = \big[-1\,;+\infty\big[$$

2. Etablir que la fonction f est décroissante sur son ensemble définition.

Exercice 7376

On considère la fonction f définie par la relation :
$$f(x) = \sqrt{2{\cdot}x^2+x+1}$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. a. Soit a et b deux nombres réels, établir l'identité :
$$f(b)-f(a) = \frac{\big(b-a\big)\cdot\big(2{\cdot}b+2{\cdot}a+1\big)}{\sqrt{2{\cdot}b^2+b+1}+\sqrt{2{\cdot}a^2+a+1}}$$

b. En déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\Big]-\dfrac{1}{4}\,;+\infty\Big[$

5. Racines carrés - calculs algébriques et positions relatives :

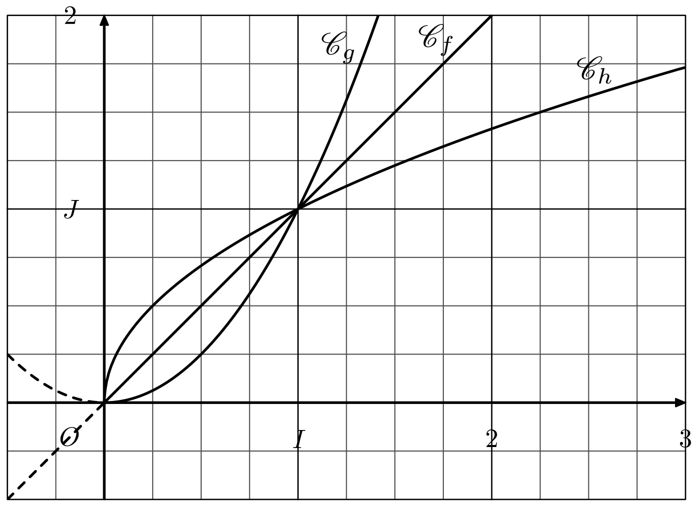
Exercice 4980

Ecrire les expressions ci-dessous sans racines carrées au dénominateur :

a. $\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}$ b. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ c. $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{6}-4}$ d. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

Exercice 2703

On considère les trois fonctions f, g, h définies par :
$$f: x \longmapsto x \quad ; \quad g: x \longmapsto x^2 \quad ; \quad h: x \longmapsto \sqrt{x}$$
dont les courbes représentatives sont données dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé ci-dessous :



1. Graphiquement, étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ sur $\mathbb{R}_+$.

Etablissons le résultat de la question précédente d'un point de vue algébrique :

2. a. Dresser le tableau de signe de l'expression x^2-x.

b. Comparer les fonctions f et g sur chacun des intervalles $]0\,;1]$ et $[1\,;+\infty[$.

3. a. Pour $x\in]0\,;+\infty[$, établir l'égalité :
$$f(x)-h(x)=\frac{x^2-x}{x+\sqrt{x}}$$

b. Comparer les fonctions f et h sur chacun des intervalles $]0\,;1]$ et $[1\,;+\infty[$.

Exercice 2959

1. On considère les deux fonctions f et g définies par :
$$f : x\longmapsto (x-1)^2 \quad ; \quad g : x\longmapsto (x^2-1)^2$$
Comparer les fonctions f et g sur l'intervalle $[0\,;1]$.

2. On considère les fonctions h et j définies par :
$$h : x\longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}+1} \quad ; \quad j : x\longmapsto \frac{1}{2x+1}$$
Comparer les fonctions h et j sur chacun des intervalles $[0\,;1]$ et $[1\,;+\infty[$.

Exercice 5031

Etablir l'égalité : $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}=1$

6. Racines carrés - un peu plus loin :

Exercice 1825

Le tableau ci-dessous représente les quotients, arrondis au centième près, de carrés d'entiers :

÷	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225
1	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225
4	0,25	1	2,25	4	6,25	9	12,25	16	20,25	25	30,25	36	42,25	49	56,25
9	0,11	0,44	1	1,78	2,78	4	5,44	7,11	9	11,11	13,44	16	18,78	21,78	25
16	0,06	0,25	0,56	1	1,56	2,25	3,06	4	5,06	6,25	7,56	9	10,56	12,25	14,06
25	0,04	0,16	0,36	0,64	1	1,44	1,96	2,56	3,24	4	4,84	5,76	6,76	7,84	9
36	0,03	0,11	0,25	0,44	0,69	1	1,36	1,78	2,25	2,78	3,36	4	4,69	5,44	6,25
49	0,02	0,08	0,18	0,33	0,51	0,73	1	1,31	1,65	2,04	2,47	2,94	3,45	4	4,59
64	0,02	0,06	0,14	0,25	0,39	0,56	0,77	1	1,27	1,56	1,89	2,25	2,64	3,06	3,52
81	0,01	0,05	0,11	0,20	0,31	0,44	0,60	0,79	1	1,23	1,49	1,78	2,09	2,42	2,78
100	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25
121	0,01	0,03	0,07	0,13	0,21	0,30	0,40	0,53	0,67	0,83	1	1,19	1,40	1,62	1,86
144	0,01	0,03	0,06	0,11	0,17	0,25	0,34	0,44	0,56	0,69	0,84	1	1,17	1,36	1,56
169	0,01	0,02	0,05	0,09	0,15	0,21	0,29	0,38	0,48	0,59	0,72	0,85	1	1,16	1,33
196	0,01	0,02	0,05	0,08	0,13	0,18	0,25	0,33	0,41	0,51	0,62	0,73	0,86	1	1,15
225	0	0,02	0,04	0,07	0,11	0,16	0,22	0,28	0,36	0,44	0,54	0,64	0,75	0,87	1

1. a. A l'aide du tableau, vérifier l'encadrement ci-dessous :
$$\frac{100}{81}<1{,}25<\frac{81}{64}$$

b. A l'aide du tableau, justifier l'encadrement :
$$\frac{9}{10}<\sqrt{1{,}25}<\frac{9}{8}$$

2. Etablir l'encadrement : $\dfrac{15}{14}<\sqrt{1{,}16}<\dfrac{13}{12}$

3. A l'aide du tableau, donner l'encadrement le plus précis du nombre $\sqrt{2{,}5}$.

Exercice 4974

On considère la fonction f définie par la relation :
$$f(x)=\frac{-2}{\sqrt{x}+3}$$

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+$.

2. Etablir que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

7. Valeur absolue - introduction :

Exercice 1936

Effectuer les calculs suivants :

a. $|2\times3-7|$ b. $|\sqrt{2}-\sqrt{3}|$ c. $2\times\left|3\times\dfrac{1}{4}-2\right|+1$

d. $\dfrac{|3|+|-3|}{\left|2-\dfrac{1}{3}\right|}$ e. $|3-\pi|$ f. $\big|2\times|2\times5-12|-7\big|$

Exercice 321

De manière algébrique, calculer les expressions suivantes :

a. $|2-3|$ b. $|5+3|$ c. $|2\times(4-5)$

d. $|4\times2-5\times7|$ e. $|7+2|\times|4-6|$ f. $|2-3|\times2$

g. $|5{,}5|+|-5{,}5|$ h. $|-5{,}5|-|4{,}5|$ i. $\dfrac{|2\times4-7|}{|3\times3-12|}$

8. Valeur absolue - calcul algébrique :

Exercice 323

Résoudre les équations suivantes :

a. $|2-x|=2{,}5$ b. $|x+100|=1$

c. $3\times|x+2|=1$ d. $|2-x|\times2=1$

e. $3\times|x+5|+3=9$ f. $2\times|2-x|+4=1$

Exercice 339

Résoudre les équations suivantes :

a. $|2x-1|=|-x+1|$ b. $|3x-1|=|3x+1|$

c. $|x-2|=5$ d. $|x+2|=6$

9. Valeur absolue - un peu plus loin :

Exercice 7302

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$f(x)=x-|2\cdot x-1|$; $g(x)=x-2$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ respectivement les courbes représentatives des fonctions f et g.

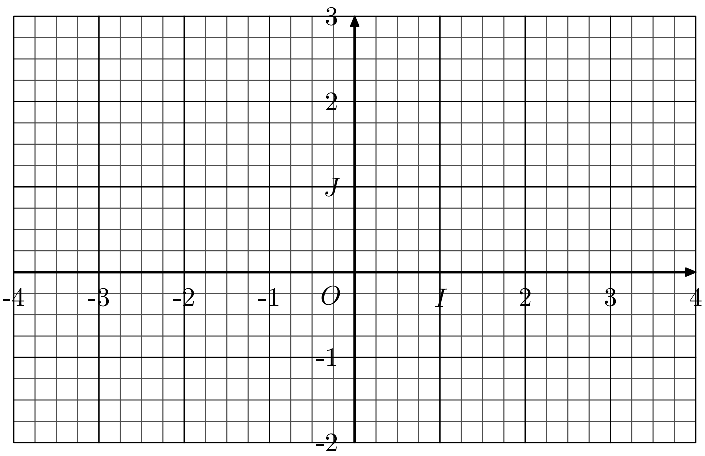
1. A l'aide de la calculatrice, déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2. Etudions ce problème sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$:

   a. Justifier que, sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$, la fonction f admet pour expression :
   $f(x)=3\cdot x+1$

   b. Sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$, résoudre l'équation : $f(x)=g(x)$

3. Déterminer l'abscisse du point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.



1. a. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère ci-dessus.

   b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geqslant1$.

2. a. Tracer la courbe $\mathscr{C}_g$ dans le repère ci-dessus.

   b. Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x)\leqslant0$.

Exercice 303

Résoudre les équations suivantes :

a. $|x+3|-|2x+1|=2$ b. $|x|+3\cdot|4x-1|=x+1$

Exercice 302

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=|x+2|$; $g(x)=|x|-1$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives respectives des fonctions f et g :

Exercice 324

On considère l'équation (E) définie par :

(E) : $|x+1|+|x-1|\leqslant5$

On considère les trois intervalles suivants :

$I=]-\infty\,;-1]$; $J=[-1\,;1]$; $K=[1\,;+\infty[$

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $f : x\longmapsto|x+1|+|x-1|$

   Simplifier l'expression de la fonction f sur chacun des trois intervalles I, J et K.

2. a. Résoudre l'inéquation (E) sur chacun des trois intervalles I, J et K.

   b. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E).

10. Opérations sur les fonctions :

Exercice 2695

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$:

$f : x \longmapsto x+2 \quad ; \quad g : x \longmapsto (3x-2)(2x+4)$

1. Déterminer la forme simplifiée des expressions suivantes :

   a. $(f+g)(x)$ b. $(f\times g)(x)$ c. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

2. Donner l'ensemble de définition de la fonction $\dfrac{f}{g}$.

Exercice 408

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;4]$ dont le tableau de variations est données ci-dessous :

x	$-\infty$	-2	1	4
Variation de f	-5 ↗	-2 ↗	2 ↘	-1

On considère les fonction g, h et j définies par :

$g(x) = f(x)+2 \quad ; \quad h(x) = 2\cdot f(x) \quad ; \quad j(x) = -f(x)$

Dresser les tableaux de variation des fonctions g, h et j.

Exercice 7378

On considère la fonction f définie sur $[1\,;7]$ dont le tableau de variations est donnée ci-dessou :

x	1	3	7
Variation de f	4 ↗	5 ↘	1

1. Sans justification, dresser les tableaux de variations des fonctions g et h définies par :
   $g(x) = 2\cdot f(x) \quad ; \quad h(x) = f(x)+2$

2. On considère la fonction j définie par la relation :
   $j(x) = f(x-2)$

   a. Donner l'ensemble de définition de la fonction j.

   b. Dresser, sans justification, le tableau de variations de la fonction j.

11. Composition : racines :

Exercice 4983

On considère la fonction f polynômiale du second degré définie par la relation :
$f(x) = -x^2 - 2\cdot x + 3$

On construit la fonction g par la relation :
$g\colon x \longmapsto \sqrt{f(x)}$

1. Conjecture sur la fonction g :

   Après avoir tracé la courbe représentative de la fonction g à l'aide de la calculatrice :

   a. Conjecturer l'ensemble de définition de la fonction g.

   b. Conjecturer le sens de variation de la fonction g sur les intervalles $[-3\,;-1]$ et $[-1\,;1]$.

2. Etude de la fonction g :

   a. Déterminer les zéros de la fonction f, puis compléter le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$ ↗	0 ↗	$\cdots$ ↘	0 ↘	$-\infty$

   b. Justifier que la fonction g est définie sur $[-3\,;1]$.

   c. Justifier que la fonction g est décroissante sur $[-1\,;1]$.

Exercice 4982

1. On considère la fonction f dont l'image de x est donnée par la relation :
   $f(x) = \sqrt{2\cdot x - x^2}$

   a. Dresser le tableau de signe de la fonction suivante :
   $x \longmapsto 2x - x^2$

   b. En déduire l'ensemble de définition de la fonction f.

2. On considère la fonction g définie par :
   $g\colon x \longmapsto \sqrt{x^3 - 3x - 2}$

   a. Développer l'expression : $(x+1)^2\cdot(x-2)$

   b. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.

Exercice 5030

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$f(x) = \sqrt{\dfrac{3-2\cdot x}{2\cdot x+3}}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction de la fonction f.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$ par la relation :
   $g(x) = \dfrac{3-2\cdot x}{2\cdot x+3}$

   a. Déterminer les réels a et b réalisant l'identité suivante :

$$g(x) = a + \frac{b}{2{\cdot}x + 3}$$

b. Etablir le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $\left]-\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

12. Composition : inverses :

Exercice 6571

On considère la fonction f définie par l'expression :
$f(x) = 2{\cdot}x^2 - 6{\cdot}x + 4$

On construit une fonction g définie par l'expression :
$$g(x) = \frac{1}{2{\cdot}x^2 - 6{\cdot}x + 4}$$

1. Conjecture sur la fonction g :

   Après avoir tracé la courbe représentative de la fonction g à l'aide de la calculatrice :

   a. Conjecturer l'ensemble de définition de la fonction g

   b. Conjecturer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$.

2. Etude de la fonction g :

   a. Déterminer les zéros de la fonction f, puis compléter le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$ ↘	0 ↘	$\cdots$	↗ 0	↗ $+\infty$

   b. Justifier que la fonction g n'est pas définie pour $x=1$ et $x=2$.

   c. Justifier que la fonction g est croissante sur $]-\infty\,;1[$.

Exercice 7303

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par les relations :
$$f(x) = \frac{1}{x-2} \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

Sans justification, donner le sens de variations des fonctions f et g sur l'intervalle $]-\infty\,;2[$.

13. Un peu plus loin - ensemble de définition :

Exercice 2141

On considère les deux fonctions suivantes :
$$f : x \longmapsto \sqrt{2x-1}{\cdot}\sqrt{4x+3} \quad ; \quad g : x \longmapsto \sqrt{(2x-1)(4x+3)}$$

1. a. A l'aide d'une calculatrice graphique, tracer la courbe représentative de la fonction f, puis celle de la fonction g.

   b. Graphiquement, donner l'intervalle sur lequel ces deux fonctions coïncident.

2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

3. a. Déterminer le tableau de signe de l'expression algébrique $(2x-1)(4x+3)$.

   b. En déduire le domaine de définition de la fonction g.

Exercice 536

1. Développer l'expression : $(x+1)(3-2x)(x-1)$.

2. On considère les deux fonctions f et g dont leurs images du nombre x sont définies de la manière suivante :
$$f(x) = \frac{-2x^3 + 3x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} \quad ; \quad g(x) = 3 - 2x$$

   a. Déterminer l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions.

   b. Etablir que les deux fonctions f et g sont égales sur un ensemble qu'on précisera.

Exercice 2194

1. On considère les deux fonctions f et g dont l'image de x est définie par les relations :
$$f(x) = \frac{-x^2 - 3x + 4}{(3x-2)(-x+1)} \quad ; \quad g(x) = \frac{x+4}{3x-2}$$

   a. Simplifier l'expression : $g(x) - f(x)$.

   b. Comparer les fonctions f et g.

2. On considère les deux fonctions j et ℓ définies par :
$$j(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{4-x}} \quad ; \quad \ell(x) = \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{4-x}}{4x-3}$$

   a. Déterminer l'ensemble de définition de ces deux fonctions.

   b. Développer l'expression suivante :
$$A = \left(\sqrt{3x+1} + \sqrt{4-x}\right)\left(\sqrt{3x+1} - \sqrt{4-x}\right)$$

   c. Montrer que les deux fonctions j et ℓ sont égales sur l'ensemble $\left[-\frac{1}{3}\,;4\right]\backslash\left\{\frac{3}{4}\right\}$

Exercice 2694

1. On considère les deux fonctions :

$f : x \longmapsto 3x-2$; $g : x \longmapsto \dfrac{14x+7}{2x+1}$

a. Etablir l'égalité suivante :
$6x^2+13x+5 = (2x+1)(3x+5)$

b. On considère la fonction $f+g$. Etablir l'égalité :
$(f+g)(x) = 3x+5$

c. Donner l'ensemble sur lequel la fonction $f+g$ est définie.

2. On considère les deux fonctions suivantes :
$f : x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x^2+x}$; $g : x \longmapsto (x+1)(-3x+x^2)$

a. On considère la fonction $f \cdot g$. Etablir l'égalité suivante :
$(f \times g)(x) = 2x^2-5x-3$

b. Donner l'ensemble sur lequel la fonction $f \cdot g$ est définie.

3. On considère les deux fonctions f et g définies par :
$f : x \longmapsto x^2-x$; $g : x \longmapsto x+\sqrt{x}$

a. Etablir l'égalité suivante :
$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = x-\sqrt{x}$

b. Donner l'ensemble sur lequel la fonction $\dfrac{f}{g}$ est définie.

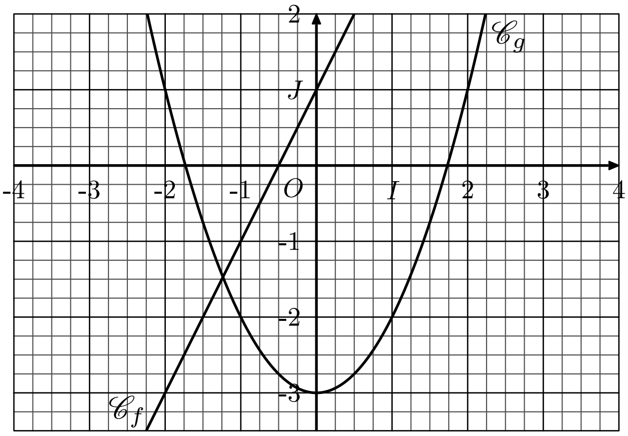
14. Un peu plus loin - composée de fonctions :

Exercice 4977

On considère les deux fonctions f et g définie sur $[-4;4]$ par les relations :

$f(x) = 2x+1$; $g(x) = x^2-3$

On donne les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g dans le repère $(O;I;J)$ ci-dessous :



1. Par lecture graphique, compléter les tableaux de valeurs suivants :

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$f(x)$					

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$					

2. On considère le programme de calcul suivant :

- Prendre un nombre x ;
- Déterminer l'image de x par la fonction f ; on note ce nombre x' ;
- Déterminer l'image de x' par la fonction g ; on note ce nombre $g(f(x))$.

On peut noter ce programme de calcul par la chaine :
$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$

a. Déterminer la valeurs des expressions suivantes :
$g(f(-1))$; $g\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

b. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$g(f(x))$					

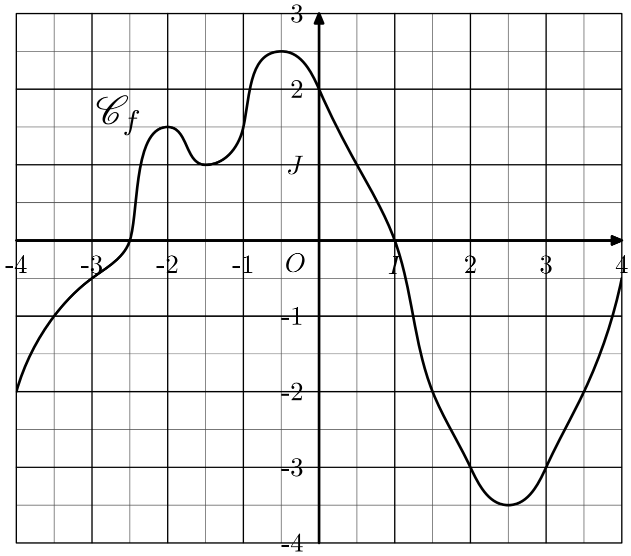
On vient de créer une nouvelle fonction qui à un nombre x associe l'image $g(f(x))$. Cette fonction s'appelle la fonction composée de f par g et se note $g \circ f$.

3. Tracer dans le repère ci-dessus la courbe $\mathscr{C}_{g \circ f}$ représentative de la fonction $g \circ f$.

4. Donner l'expression, en fonction de x, de la fonction $g \circ f$.

Exercice 2234

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-4;4]$ dont la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative est donnée ci-dessous dans le repère $(O;I;J)$ orthonormé :



1. Calculer les images suivantes :

a. $(f \circ f)(1)$ b. $(f \circ f)(-2)$ c. $(f \circ f)(3)$

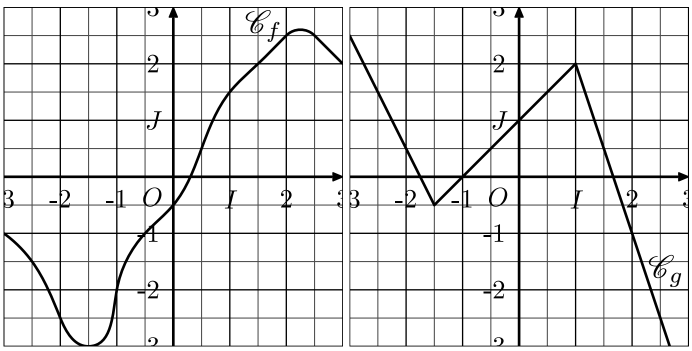
2. On définit la fonction f^n comme la fonction composée n

fois de la fonction f par elle-même. Déterminer la valeur des images suivantes :

a. $f^3(1)$ b. $f^3(-3)$ c. $f^4(-1)$

Exercice 2698

On considère deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-3\,;3]$ dont les courbes, respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, représentatives sont données dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormée :



1. Déterminer la valeur des expressions suivantes :

a. $(f\circ g)(-2)$ b. $(f\circ g)(1{,}5)$ c. $(f\circ g)(2)$

2. Déterminer la valeur des expressions suivantes :

a. $(g\circ f)(-3)$ b. $(g\circ f)(0)$ c. $(g\circ f)(1)$

Exercice 4979

On considère les deux fonctions suivantes :
$f\colon x\longmapsto x^2-2$; $g\colon x\longmapsto\sqrt{x}$

1. a. Donner les ensembles de définition des fonctions f et g.
   b. Peut-on parler de l'image de 1 par la fonction $g\circ f$? Justifier votre réponse.
2. a. Dresser le tableau de signe de la fonction f.
   b. Donner l'ensemble de définition de la fonction $g\circ f$.

Exercice 4978

Pour chacun des couples de fonctions ci-dessous, déterminer l'expression de la fonction $g\circ f$:

1. $f\colon x\longmapsto 3x-5$; $g\colon x\longmapsto x^2$
2. $f\colon x\longmapsto x^2-1$; $g\colon x\longmapsto -2x+4$
3. $f\colon x\longmapsto x^2+1$; $g\colon x\longmapsto x^2+1$

15. Valeur absolue - étude de fonctions :

Exercice 2301

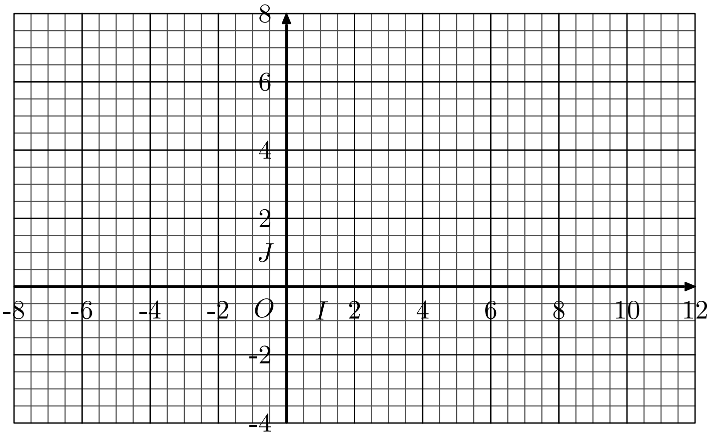
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=-\frac{1}{4}\cdot|x+2|+\frac{3}{4}\cdot|x-4|$$

1. a. Simplifier chaque expression en fonction de l'intervalle étudié :

x	$-\infty$ $\quad$ -2	4	$+\infty$
$\lvert x+2\rvert$			
$\lvert x-4\rvert$			

   b. Donner l'expression simplifiée de la fonction f sur chacun des trois intervalles suivants :
$I=]-\infty\,;-2]$; $J=[-2\,;4]$; $K=[4\,;+\infty[$

2. On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé donné ci-dessous :



3. D'après la représentation graphique, tracer le tableau de variations de la fonction f.

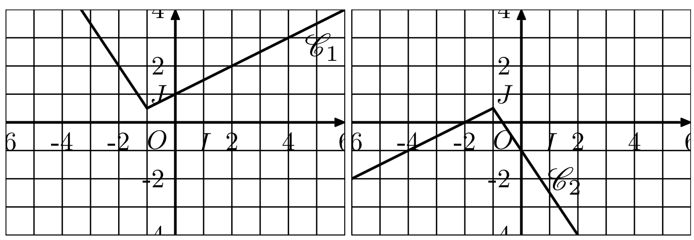
Exercice 290

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$$f(x)=|x+1|-\frac{1}{2}\cdot x$$

1. Simplifier l'écriture des expressions algébriques sur les intervalles $]-\infty\,;-1]$ et $[-1\,;+\infty[$ dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$ $\quad$ -1	$+\infty$
$\lvert x+1\rvert$		
$f(x)$		

2. Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, sont les deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. Laquelle de ces deux courbes est la représentation de la fonction f :



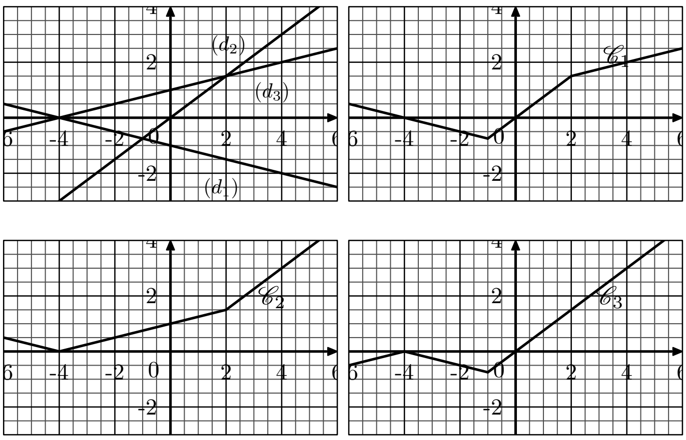
Exercice 326

On considère la fonction f définie par la relation :
$$f(x)=\left|\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}\right|-\left|\frac{1}{4}\cdot x-\frac{1}{2}\right|$$

1. Simplifier les expressions algébriques sur les trois intervalles $]-\infty\,;-1]$, $[-1\,;2]$ et $[2\,;+\infty[$ dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$\left\lvert\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}\right\rvert$				
$\left\lvert\frac{1}{4}\cdot x-\frac{1}{2}\right\rvert$				
$f(x)$				

2. Dans un repère orthonormé, des courbes sont représentées ci-dessous :



a. Par lecture graphique et sans justification, donner les équations réduites des droites (d_1), (d_2) et (d_3).

b. Parmi les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$, quelle est la représentation de la fonction f ?

Exercice 5032

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

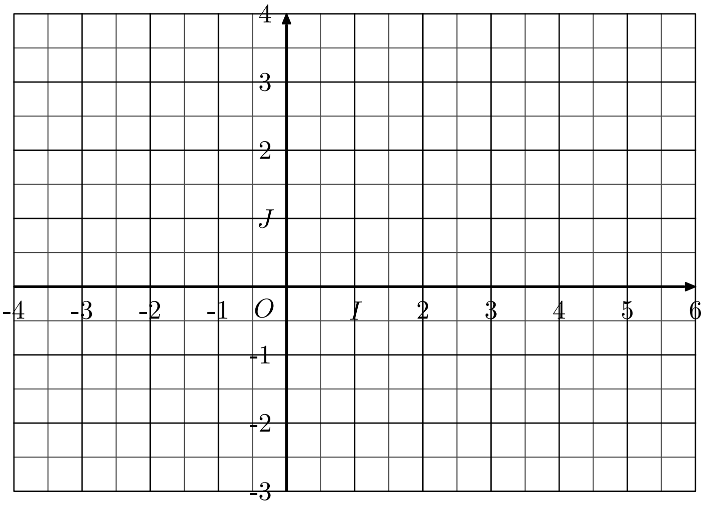
$$f(x)=\left\lvert\frac{3}{4}\cdot x-\frac{3}{2}\right\rvert-\left\lvert\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}\right\rvert$$

1. Déterminer l'image de -4 et de 0 par la fonction f.

2. Simplifier l'expression de la fonction f sur chacun des trois intervalles ci-dessous :

$$I=]-\infty\,;-1] \quad ; \quad J=[-1\,;2] \quad ; \quad K=[2\,;+\infty[$$

3. On munit le plan du repère $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous. Effectuer dans ce repère le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.



4. a. Graphiquement et sans justification, donner l'ensemble des solutions de l'équation $f(x)=-1$.

b. Algébriquement, justifier que l'équation $f(x)=-1$ n'admet aucune solution sur l'intervalle $]-\infty\,;-1[$.

16. Un peu plus loin - propriétés algébriques de la valeur absolue :

Exercice 5015

On souhaite établir l'égalité suivante pour tous nombres réels x et y :

$$|x\times y|=|x|\times|y|$$

Pour cela, on raisonne par disjonction de cas sur la valeur de x et sur la valeur de y. Etablir cette relation dans chacun des cas suivant :

a. $x\in\mathbb{R}_+$ et $y\in\mathbb{R}_+$ b. $x\in\mathbb{R}_+$ et $y\in\mathbb{R}_-$

c. $x\in\mathbb{R}_-$ et $y\in\mathbb{R}_+$ d. $x\in\mathbb{R}_-$ et $y\in\mathbb{R}_-$

Exercice 5016

1. Pour tout nombres réels x et y, établir l'inégalité :

$$|x+y|^2\leqslant\big(|x|+|y|\big)^2$$

2. En déduire, pour tout réels x et y, la comparaison suivante :

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|$$

255. Exercices non-classés :

Exercice 6755

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés *(pixels)* dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de façon suivante :

- $x=0$ pour le blanc ;
- $x=1$ pour le noir ;
- $x=0{,}01$; $x=0{,}02$ et ainsi de suite jusqu'à $x=0{,}99$ par

pas de 0,01 pour toutes les nuances intermédiaires *(du clair au foncé)*.

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.
Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites "*fonctions de retouche*".
Une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ est dite "*fonction de retouche*" si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0)=0$;
- $f(1)=1$;
- f est continue sur l'intervalle $[0\,;1]$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x)>x$, et éclaircie, si $f(x)<x$.

- si $f(x)=x^2$, un pixel de nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $0{,}2^2=0{,}04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.
- Si $f(x)=\sqrt{x}$, la nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $\sqrt{0{,}2}\approx 0{,}45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

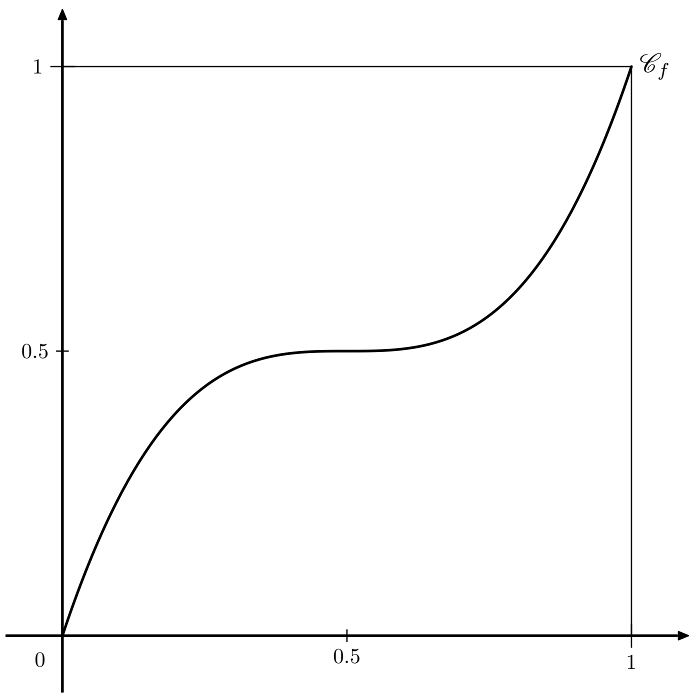
Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :
$f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$

On admet que la fonction f est une fonction de retouche. Sa courbe $\mathscr{C}_f$ représentative est donnée ci-dessous :



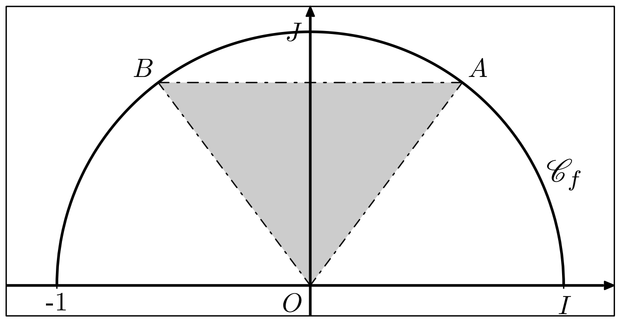
1. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\leqslant x$, à l'aide du graphique donné ci-dessous, en faisant apparaître les pointillés utiles.
2. Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

Exercice 7379

1. Pour tous nombres réels a et b, établir l'égalité :
$$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot\left[\left(a+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3\cdot b^2}{4}\right]$$
2. Etablir que la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7380

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1\,;1]$ par la relation :
$f(x) = \sqrt{1-x^2}$
dont la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative est donnée ci-dessous dans un repère $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous :



Soit x un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$. On note respectivement A et B les points de la courbe $\mathscr{C}_f$ respectivement d'abscisses x et $-x$.

Déterminer l'abscisse du point A afin que l'aire du triangle OAB soit maximale.

Indication : on pourra établir l'identité :
$$x^2-x^4=\frac{1}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2$$