Compiler exercice   Compiler correction   Plus d'option

Première S/Concours olympiades

1. Appréhender une nouvelle définition :

Exercice 5940

Un entier naturel non nul est un nombre Harshad s'il est divisible par la somme de ses chiffres.
Par exemple, $n=24$ est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est $2+4=6$, et 24 est bien divisible par 6.

1. a. Montrer que 364 est un nombre de Harshad.
   b. Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad?
2. a. Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.
   b. Soit n un entier non nul. Donner un nombre Harshad de n chiffres.

Exercice 5941

A partir de deux nombres entiers positifs, on construit une liste de nombres où chaque nombre est la somme des deux précédents.

1. Choisir deux nombres entiers positifs inférieurs à 10 et déterminer les dix premiers nombres de la liste définie précédemment.
2. Un mathé-magicien prétend être capable de déterminer rapidement et exactement la somme des dix premiers nombres d'une liste quelconque ainsi construite. Montrer que, quels que soient les nombres de départ, cette somme est multiple d'un des nombres de la liste dont on déterminera la position.

Exercice 5982

Une calculatrice défectueuse permet seulement :
- de taper des nombres positifs ou nuls ;
- de faire l'opération suivante : à partir de trois nombres entrés successivement $(x\,;y\,;z)$, elle affiche 0 si $x=y$ et le résultat de $\dfrac{z}{x-y}$ sinon.
$$(x\,;y\,;z) \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{z}{x-y} & \text{si } x\neq y \\ 0 & \text{si } x=y \end{cases}$$
- l'utilisation des parenthèses qui permet de composer des calculs.

1. En détaillant les calculs, vérifier les résultats suivants donnés par la calculatrice :
$(0\,;1\,;2) \longmapsto -2 \quad ; \quad \big((2\,;0\,;1)\,;1\,;1\big) \longmapsto -2$
2. Que donne $(2\,;0\,;1)$, $(0\,;2\,;1)$ et $\big(2\,;1\,;\,(2\,;1\,;2)\big)$?
3. Donner un calcul permettant d'obtenir -1.
4. Vérifier que le calcul $(a\,;0\,;1)$ permet d'obtenir l'inverse de a pour tout $a>0$.
5. Proposer un calcul permettant de faire la division de deux nombres positifs : $\dfrac{a}{b}$ avec $a\geqslant 0$ et $b>0$.
6. Proposer un calcul permettant de faire la multiplication de deux nombres positifs : $a\times b$ avec $a\geqslant 0$ et $b\geqslant 0$.

2. Arithmétique :

Exercice 5942

1. a. En partant de 12 589 et en comptant de 29 en 29, peut-on atteindre le nombre 12 705?
   b. En partant de 1 485 et en comptant de 29 en 29, peut-on atteindre le nombre 310 190?
   Expliquer votre démarche.
2. Quel est le plus petit entier positif à partir duquel, en comptant de 29 en 29, on peut atteindre 2013?
3. Existe-t-il des entiers positifs inférieurs à 2 013 à partir desquels il est possible d'atteindre ce nombre aussi bien en comptant de 29 en 29 qu'en comptant de 31 en 31?
Si oui, les trouver tous.

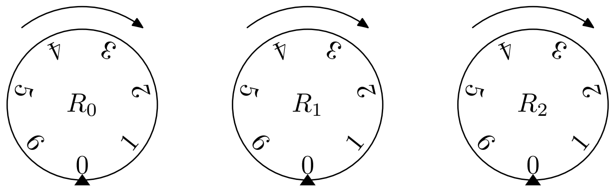
Exercice 5943

Un compteur est composé de trois roues crantées, nommées R_0, R_1 et R_2 comportant toutes les trois 7 crans, numérotés de 0 à 6. Ce compteur est conçu de sorte que :

- Les roues tournent toujours d'un cran vers le cran suivant, dans cet ordre :
$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 0$
- Lorsque la roue R_0 effectue un tour complet, c'est à dire

lorsqu'elle tourne de 7 crans alors la roue R_1 tourne d'un cran.

- Lorsque la roue R_1 effectue un tour complet, c'est à dire lorsqu'elle tourne de 7 crans, alors la roue R_2 tourne d'un cran.
- Initialement, les roues R_0, R_1 et R_2 affichent toutes 0.



Entre chaque question, le compteur est remis à zéro, c'est-à-dire que chaque roue affiche de nouveau 0

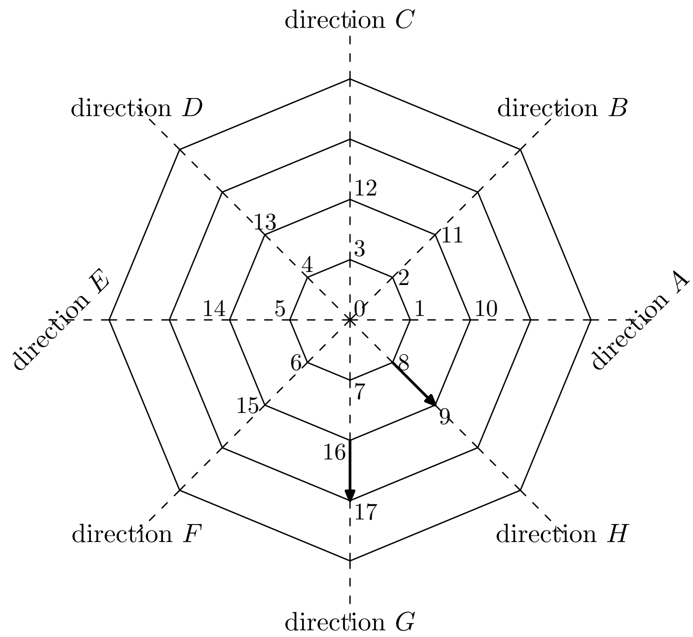
1. On tourne la roue R_0 de 15 crans. Quels sont alors les numéros affichés par les roues?
2. On tourne la roue R_0 de 100 crans. Quels sont alors les numéros affichés par les roues?
3. On tourne la roue R_0 jusqu'à ce que la roue R_2 affiche 5 pour la première fois. De combien de crans a-t-on tourné R_0?
4. De combien de crans faut-il tourner R_0 pour que les roues reviennent pour la première fois en même temps à 0?
5. On tourne la roue R_0 de 3580 crans. Quels sont alors les numéros affichés par les roues?

Exercice 5968

On considère des octogones réguliers, de même centre O.
Aux sommets de l'octogone central, on note les huits premiers entiers non nuls.
Sur les sommets du deuxième octogone, on inscrit les 8 premiers nombres entiers suivants, avec une rotation de 45 degrés autour du point O.
Et ainsi de suite...

On dit que chaque nombre entier a une direction *(A, B, C, D, E, F, G ou H par rapport à l'origine O)*.
Par exemple, 1 a pour direction A, 2 a pour direction B...

Voici une figure représentant les quatre premiers octogones:



1. Quel sera le premier entier inscrit sur le quatrième octogone? Préciser sa direction.
2. Déterminer le premier entier inscrit sur le huitième octogone. Préciser sa direction.

Exercice 5984

On part d'un entier n strictement positif:

- Si n est pair, on le transforme en $\dfrac{n}{2}$
- Si n est impair $(n>1)$, on le transforme en $3n+1$.
- Si $n=1$, on s'arrête.

Exemples:

- Si $n=6$, on obtient la suite:
  $6 \longmapsto 3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$
- Si $n=13$, on obtient la suite:
  $13 \mapsto 40 \mapsto 20 \mapsto 10 \mapsto 5 \mapsto 16 \mapsto 8 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$

Il a été observé à l'aide d'un programme sur ordinateur, que pour chaque nombre entier testé, la suite aboutit toujours à 1. Mais ce résultat n'a pas été démontré à ce jour.

On peut par ailleurs, s'intéresser à la longueur de cette suite, qu'on notera $L(n)$.
Par exemple: $L(6)=9$ et $L(13)=10$.

1. Déterminer $L(n)$ pour les entiers allant de 1 à 12.
2. Soit p un entier, on considère l'entier $n=2^p$.
   Exprimer $L(n)$ en fonction de p.
3. Trouver un nombre entier n compris entre 2^{2008} et 2^{2009} tel que:
   $L(n)=2012$.
   Indication: On pourra chercher un nombre de la forme $2^p \times q$.
4. Soit k un entier non nul.
   a. Montrer que: $L(8k+4)=L(6k+4)+3$.
   b. De même, montrer que: $L(8k+5)=L(6k+4)+3$.
   c. Montrer que: $L(16k+2)=L(16k+3)$

3. Equations et algèbre :

Exercice 5971

Calculer la somme suivante sans utiliser la calculatrice :

$$\begin{aligned}&\left(1^2-2^2-3^2+4^2\right)+\left(5^2-6^2-7^2+8^2\right)\\&\qquad+\left(9^2-10^2-11^2+12^2\right)\\&\qquad+\cdots+\left(2009^2-2010^2-2011^2+2012^2\right)\end{aligned}$$

Exercice 5976

1. L, S et V étant trois nombres réels positifs, montrer que les triplets $(a\,;b\,;c)$ solutions du système :

$$\begin{cases} a+b+c = L \\ ab+ac+bc = S \\ abc = V \end{cases}$$

sont tels que a, b et c sont les solutions de l'équation :
$X^3-L{\cdot}X^2+S{\cdot}X-V=0$

2. Déterminer les dimensions d'un pavé droit dont la somme des longueurs de toutes ses arêtes est de $20\,cm$, la somme des aires des six faces est de $14\,cm^2$ et dont le volume est de $3\,cm^3$.

3. Quels sont les volumes minimum et maximum d'un pavé droit dont la somme des longueurs de toutes les arêtes est de $20\,cm$, la somme des aires des six faces est de $14\,cm^2$.

4. Géométrie :

Exercice 5969

A et B sont deux points d'un cercle de centre O et de rayon 5 tels que $AB=6$.

Le carré $PQRS$ est inscrit dans le secteur angulaire OAB de sorte que :

- P est sur le rayon $[OA]$;
- S est sur le rayon $[OB]$;
- Q et R sont deux points de l'arc de cercle reliant A et B.

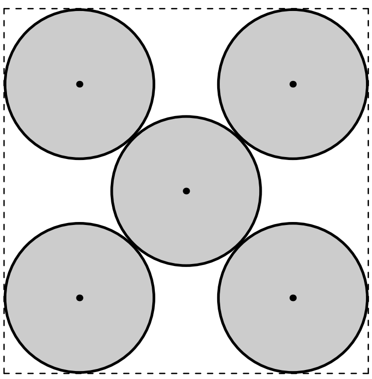
1. Faire une figure correspondant à la situation proposée.
2. Calculer l'aire du carré $PQRS$.

Exercice 5975

Cinq cercles de rayon $1\,cm$ ont été placés dans un carré comme l'indique le dessin.

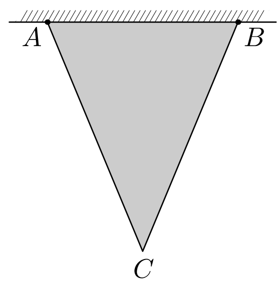
Les cercles sont tangents entre eux et tangents aux côtés du carré.

Déterminer la longueur d'un côté du carré.



Exercice 5977

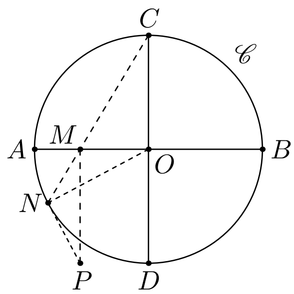
Un fermier dispose d'un grand terrain le long d'un mur et d'un grillage. Le long de ce même mur, il veut réaliser un poulailler sous la forme d'un triangle isocèle de sommet C. Le grillage ne sera pas posé contre le mur.
Quelle est l'aire maximale du poulailler sachant que le grillage a une longueur de $88\,m$?



(On pourra utiliser l'angle au sommet et le fait que $\sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{\sin(2\theta)}{2}$*)*

Exercice 5980

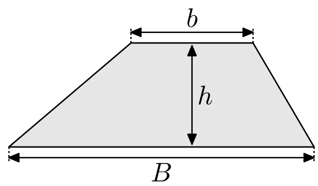
On donne un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et deux diamètres perpendiculaires $[AB]$ et $[CD]$. M étant un point du segment $[AB]$, on trace (CM) qui recoupe le cercle en N. La tangente en N au cercle et la perpendiculaire en M à (AB) se coupent en P. Montrer que :
$OP=CM$.



5. Géométrie et algèbre :

Exercice 5967

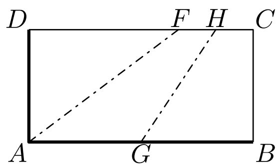
Rappel : Aire d'un trapèze
$A=\dfrac{(B+b)\times h}{2}$



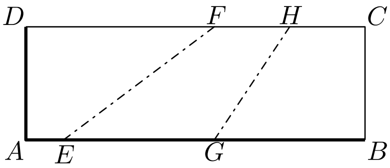
Une pizza rectangulaire $ABCD$ comporte de la croûte sur deux côtés consécutifs, $[DA]$ et $[AB]$. **On cherche comment partager la pizza en trois morceaux équitables** : chaque part doit avoir la même longueur de croûte et la même aire.

Dans chaque situation, on fixe la longueur du petit côté $AD{=}1$.

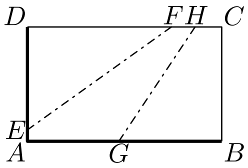
1. Dans le cas particulier ci-contre, on suppose que le partage réalisé est équitable.
Quelle est la longueur AB?
Déterminer les longueurs :
DF, FH et HC.



2. On généralise la situation en posant $AB{=}L$ *(et en supposant toujours que $AD{=}1$)*.
Déterminer, pour chaque situation ci-dessous, les longueurs utiles permettant de découper équitablement la pizza.



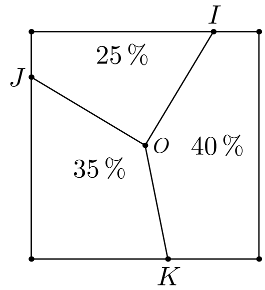
situation 1 : $L{>}2$



situation 2 : $L{<}2$

Exercice 5970

Dans un carré de 10 cm de côté, on veut réaliser un graphique statistique dans lequel les aires des 3 parties doivent être proportionnelles aux fréquences qu'elles représentent *(O est le centre du carré)*.
Le point I est à 2 cm du sommet le plus proche.

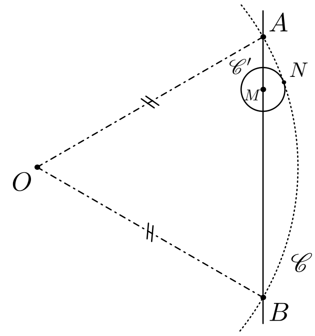


Calculer les distances de J et K aux sommets du carré les plus proches.

Exercice 5978

On considère un triangle OAB équilatéral. On note R la mesure des côtés du triangle OAB.
On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre O passant par le point A.

Soit x un nombre réel tel que $0{<}x{<}\frac{R}{2}$. On place le point M sur le segment $[AB]$ vérifiant :
$AM = x$.



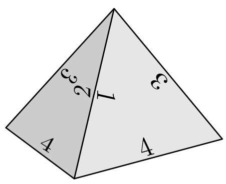
On considère le cercle $\mathscr{C}'$ de centre M et tangent au cercle $\mathscr{C}$ au point N.

Exprimer le rayon du cercle $\mathscr{C}'$ en fonction de R et de x.

6. Probabilité :

Exercice 5983

Un dé tétraèdrique comporte quatre faces comme le dé représenté ci-contre. Lorsqu'on jette un tel dé, le résultat est le nombre inscrit au plus près de la base tétraèdre. Dans notre exemple, le dé tétraèdrique est tombé sur la face 4.



Antoine, Baptiste, Cyril et Diane jouent avec quatre dés tétraèdriques réguliers et équilibrés mais qui ne sont pas numérotés de façon habituelle. Ainsi, le dé d'Antoine compte quatre faces numérotées 1, 6, 6 et 6. Avec ce dé, le nombre 1 est obtenu avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et le nombre 6 avec la probabilité $\frac{3}{4}$.

- Le dé de Baptiste est numéroté 4, 4, 5 et 5 ;
- celui de Cyril 3, 3, 3 et 8 ;
- et enfin, celui de dianne 2, 2, 7 et 7.

1. Chaque joueur jette ce dé tétraèdrique une fois. Qui a le plus de chances d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 6?
2. Les joueurs commencent une série de duels : Antoine joue contre Baptiste, Baptiste joue contre Cyril, Cyril joue contre Diane, Diane joue contre Antoine. Le gagnant de chaque duel est le joueur qui a obtenu le résultat le plus élevé.
   a. Montrer que dans le premier duel Antoine gagne contre Baptiste avec une probabilité de $\frac{3}{4}$.
   b. Donner les probabilités de gain des joueurs dans les trois autres duels.
3. Antoine, Baptiste, Cyril et Diane jettent simultanément leur dé. Celui des quatre joueurs qui obtient le plus grand nombre gagne.
   a. Montrer que la probabilité que Baptiste gagne est égale à $\frac{3}{32}$.
   b. Qui a le plus de chances de gagner ce jeu?

7. Annales toutes séries :

Exercice 5938

On suppose qu'il existe une fonction f définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ vérifiant la propriété :
(E) : pour tous x et y de $\mathbb{N}$, $f(x{+}y){=}f(x){\cdot}f(y){-}x{\cdot}y$

Préliminaire

Démontrer que $f(0)=1$. On pourra admettre les résultats dans les parties suivantes.

A. Etude d'un premier exemple :
On suppose ici que : $f(1)=3$.

1. Calculer $f(2)$ puis $f(3)$.

2. Montrer par deux calculs distincts que $f(4)=60$ et que $f(4)=63$. Conclure.

B. Etude d'un second exemple :
On suppose ici que : $f(1)=0$.

1. Calculer $f(2)$, $f(3)$ et $f(4)$.

2. Conjecturer l'expression de $f(n)$ en fonction de n.

3. Démontrer cette conjecture.

4. Prouver que pour la fonction trouvée aux 2. et 3. la propriété (E) est bien vérifiée.

C. Cas général

Première partie : on note $f(1)=a$

1. Exprimer $f(2)$ et $f(3)$ en fonction de a.

2. Exprimer $f(4)$ en fonction de a de deux manières différentes.

3. En déduire que : $a=0$ ou $a=2$.

Seconde partie : on étudie le second cas :
On suppose ici que : $f(1)=2$.
Exprimer $f(n)$ en fonction de n.

255. Exercices non-classés :

Exercice 7318

Liber abaci

Il y a 4 000 ans, les anciens égyptiens utilisaient en calcul une propriété arithmétique bien étonnante : tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ strictement positif s'écrit comme une somme de fractions unitaires, c'est-à-dire d'inverses d'entiers positifs, tous différents les uns des autres. Depuis lors, une telle décomposition s'appelle une "écriture égyptienne". Ainsi, la somme $\frac{1}{6}+\frac{1}{17}+\frac{1}{102}$ est-elle une "écriture égyptienne" du quotient $\frac{4}{17}$, tandis que les sommes $\frac{1}{17}+\frac{1}{17}+\frac{1}{17}+\frac{1}{17}$ et $\frac{1}{17}+\frac{3}{17}$ n'en sont pas. Plusieurs questions sur ces écritures demeurent, aujourd'hui encore, ouvertes.

1. Pourquoi les deux dernières décompositions données en préambule ne sont-elles pas des "*écriture égyptiennes*"?
Proposer une écriture égyptienne de $\frac{2}{3}$ comportant deux fractions unitaires, puis une autre de $\frac{2}{3}$ en comportant trois.

2. **Un algorithme**

Soient p et q deux entiers tels que $0<p<q$. Le quotient $\frac{p}{q}$ est donc un élément de $]0;1]$.

```
k ← 1
p₁ ← p
q₁ ← q.
Tant que pₖ≠0
    Déterminer le plus petit entier positif nₖ
        tel que :        1/nₖ ⩽ pₖ/qₖ.
           Ainsi :   1/nₖ ⩽ pₖ/qₖ < 1/(nₖ−1)
    pₖ₊₁ ← pₖ·nₖ − qₖ
    qₖ₊₁ ← qₖ·nₖ
           Ainsi :   pₖ₊₁/qₖ₊₁ = pₖ/qₖ − 1/nₖ
    Incrémenter k
           c'est-à-dire augmenter la valeur du
           compteur k d'une unité.
Fin du Tant que
```

a. On fait ici tourner l'algorithme sur le quotient $\frac{p}{q}=\frac{1}{4}$.
Au début du premier tour de boucle :
$k=1$; $p_1=4$; $q_1=17$.
On déterminer alors $n_1=5$. Puis $p_2=3$, $q_2=85$ et k vaut 2 avant d'entrer dans le deuxième tour de boucle.
Poursuivre jusqu'à l'arrêt complet.
Que vaut $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}$?
Les quatre fractions unitaires sont-elles distinctes?

b. On suppose que l'algorithme prend fin à l'issue du $N^{\text{ème}}$ tour de boucle. Justifier qu'il permet de donner une "*écriture égyptienne*" du quotient $\frac{p}{q}$.

c. Justifier clairement que l'algorithme ne peut être illimité.

Cet algorithme permet donc de donner une "*écriture égyptienne*" de n'importe quel nombre rationnel élément de $]0;1[$. Il appartient à une classe d'algorithmes dits "*gloutons*" et est attribué à Léonard de Pise, auteur du *Liber abaci (1202)*.

L'adjectif "glouton" s'applique à des algorithmes faisant, à chaque étape, un choix optimal. L'optimalité globale n'est pas nécessairement atteinte comme en témoignent les deux décompositions de $\frac{4}{17}$ rencontrées dans ce problème.

Exercice 7319

On dispose de n pions verticalement. Ils sont noirs sur une face, blancs sur l'autre, et sont numérotés de 1 à n. Au début du jeu, chaque pion présente aléatoirement sa face noire ou sa face blanche. **A chaque coups - qu'on appelle une *opération* dans toute la suite - on retourne un des pions et tous ses voisins du dessus**.

1	○	1	●
2	●	2	○
3	●	3	○
4	○	4	○
5	●	5	●

Le dessin ci-contre donne l'exemple du changement qu'apporte à une configuration initiale une opération avec le troisième jeton.

L'objectif du jeu est de trouver une séquence d'opérations telle que tous les pions montrent leur face blanche.

1. L'ordre dans lequel se succèdent deux opérations a-t-il de l'importance?

2. Quel est l'effet combiné de deux opérations identiques?

3. Indiquer les numéros des pions à retourner pour ne voir que des faces blanches, dans les situations représentées ci-dessous.

	A		B		C		D
1	●	1	○	1	○	1	●
2	○	2	●	2	○	2	●
		3	○	3	●	3	○
		4	●	4	○	4	●
		5	○				

4. On donne l'algorithme suivant, pour une configuration de n cases :

```
Pour k allant de n à 1 par pas de −1
        Si le jeton k est noir, effectuer une opération
        avec ce jeton
Fin Pour
```

   a. Expliquer pourquoi cet algorithme blanchit la colonne en un minimum d'opérations. Combien d'opérations met-il au maximum en oeuvre?

   b. Donner un exemple de configuration de n cases nécessitant n opérations.

