Compiler exercice Compiler correction Plus d'option

# Première ES/Second degré

## 1. Rappels :

### Exercice 4400

Parmi les équations ci-dessous, lesquelles admettent le nombre 2 pour solution?

a. $3x+1=2x-1$ b. $3(x+1)-3(2-x)=x+1$

c. $\dfrac{2x+1}{3x+4}=\dfrac{1}{2}$ d. $\sqrt{3x^2+4}=4$

### Exercice 4402

Le diagramme ci-dessous présente les étapes de la résolution algébrique d'une équation.

| |
|---|
| $5(x+2)+2x=3(x+5)+2$ |
| $5x+10+2x=3x+15+2$ |
| $7x+10=3x+17$ |
| $7x=3x+17-10$ |
| $7x=3x+7$ |
| $7x-3x=7$ |
| $4x=7$ |
| $x=\dfrac{7}{4}$ |

Décrire succinctement chacune de ces étapes en indiquant dans les étiquettes l'*action* mathématique réalisée *(factorisation, développement, soustraction...)*.

### Exercice 6994

Donner la forme développée réduite des expressions suivantes :

a. $(2x+1)(x+2)$ b. $(x-1)(2x+2)$

c. $(-2-x)(3x+1)$ d. $(2x+3)^2$

### Exercice 4424

Factoriser les expressions suivantes :

a. $(3x-1)(2x+1)+(5-x)(2x+1)$

b. $x(2-x)+(3x+1)(2-x)$

c. $(x+1)(x-1)-(2x+3)(x-1)$

d. $(3x+4)(2x-1)+4(3x+4)$

e. $(2x+4)(3-3x)+(2x+4)$

f. $(x+1)(3-2x)+(3-2x)^2$

### Exercice 6995

**Rappel :** lorsque les coefficients d'un polynôme sont des multiples d'un même nombre, une factorisation est possible.

**Exemple :**
- $2x+2=2\cdot(x+1)$
- $6x-3=3\cdot(2x-1)$

Factoriser les expressions suivantes :

a. $(x+1)(2x-1)+(2x+2)(3x+2)$

b. $(6x-3)(x+1)+(2x-1)(x+2)$

c. $(9x-3)(3x+1)-(x-2)(3x-1)$

d. $(2x+2)^2+(x+1)$

### Exercice 4612

1. Factoriser les expressions suivantes :

 a. $3x+6$ b. $2x-8$ c. $27x+18$

2. Factoriser les expressions suivantes :

 a. $(x+2)(x-3)+(3x+6)(2x-1)$

 b. $(3x+6)(x-4)-(2x-8)(x-2)$

 c. $(2x+7)(27x+18)-(5-x)(3x+2)$

### Exercice 4613

**Rappels :**

L'opposé de l'expression $3x-4$ peut s'exprimer avec les deux formes suivantes : $-3x+4$ ; $4-3x$

L'opposé du produit $a\times b$ peut s'exprimer avec les deux formes : $(-a)\times b$ ; $a\times(-b)$
Attention, le produit $(-a)\times(-b)$ est **égal** au produit $a\times b$.

**Applications :**

- Dans l'expression $(3x-4)(5x+1)+(4-3x)(2-2x)$, le facteur commun est $3x-4$.
- On a les transformations successives :
  $(2-x)(x-4) = \big[-(x-2)\big](x-4) = (x-2)(4-x)$

Factoriser les expressions suivantes :

a. $(3x-4)(5x+1)+(4-3x)(2-2x)$

b. $(x-2)(2x+3)+(2-x)(x-4)$

### Exercice 4425

Factoriser les expressions suivantes :

a. $(x-1)(2x+1)-(2x-2)(5-2x)$

b. $(2+x)(3-x)+(5-2x)(3-x)$

c. $3(4+2x)-(3+x)(10+5x)$

d. $(2-x)(3x-4)+\Big(2-\dfrac{3}{2}x\Big)(2x+3)$

e. $(2x+1)^2-4(2-3x)^2$

f. $18x^2-24x+8+(3x-2)(2-x)$

### Exercice 4547

Résoudre les équations suivantes :

a. $(4x+2)(3x-1)+x(6x+3)=0$

b. $(x+3)^2=2(2x+6)(3x-2)$

c. $(-5x-4)(2x+1)=(-4x-3)(3x+2)$

d. $(1-5x)(2x+1)=(1-3x)(3x+2)$

### Exercice 4452

Compléter le tableau de signe de chacunes des expressions $E$ :

1.

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x+1$ | | | | | 0 | | |
| $3+x$ | | | 0 | | | | |
| $E=(2x+1)(3+x)$ | | | 0 | | 0 | | |

2.

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{3}{4}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | | | | | | | |
| $4x-3$ | | | | | | | |
| $E=(x-2)(4x-3)$ | | | | | | | |

3.

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $2+x$ | | | |
| $2-x$ | | | |
| $E=(2+x)(2-x)$ | | | |

### Exercice 4404

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $(2x+1)(x+2)<0$

b. $(3-x)(2x+1)\geqslant 0$

c. $(5x+1)(x-2)>(3+x)(x-2)$

d. $(x+3)(5-x)\leqslant 2(x+3)$

### Exercice 6970

Résoudre les équations :

a. $\dfrac{x}{3x+2}=\dfrac{5x}{2x+1}$ b. $\dfrac{4x-2}{2x-3}-\dfrac{6x-2}{3x+1}=0$

### Exercice 7219

1. Factoriser les expressions suivantes :

   a. $(x+3)(2x-1)-(3x+1)(x+3)$

   b. $(6-3x)(x+2)-(2-x)^2$

2. Résoudre les inéquations suivantes :

   a. $(3-2x)(3x+1)>0$

   b. $(3x+1)(x+1)<(x+1)(4x+2)$

## 2. Sens de variation :

### Exercice 4468

**Rappels :**

Un polynôme du second degré admet pour forme développée réduite $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ où $a\neq0$.

La fonction $x\longmapsto a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ a son tableau de variations dépendant du signe du *coefficient du terme du second degré* :

•$a>0$

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{-b}{2a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ | ↘ | | ↗ |

•$a<0$

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{-b}{2a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ | ↗ | | ↘ |

Sa courbe représentative s'appelle une **parabole** et son sommet a pour abscisse $-\dfrac{b}{2a}$.

Dresser le tableau de variations de chacun des polynômes suivants :

a. $4x^2+4x+5$ b. $-2x^2-2x+3$

c. $2x^2+4x+2$ d. $-4x^2+4x+3$

e. $2x^2+3x+1$ f. $-4x^2-4x-1$

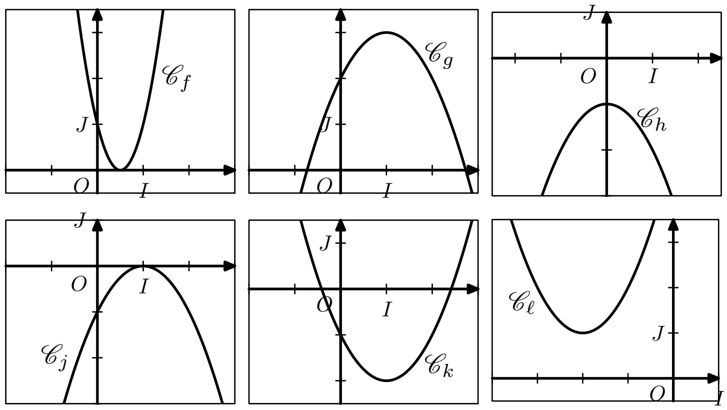
### Exercice 4469

Associer à chacune des polynômes ci-dessous sa représentation graphique :

$A=x^2+4x+5$ ; $B=-x^2+2x+2$

$C=4x^2-4x+1$ ; $D=-x^2-1$

$E=x^2-2x-1$ ; $F=-x^2+2x-1$




## 3. Autour de la forme canonique :

### Exercice 4454

Etablir les égalités suivantes :

a. $(x+2)^2-4=x^2+4x$

b. $(x-9)^2+11=x^2-18x+92$

d. $(x+3)^2-12=x^2+6x-3$

e. $2(x+1)^2+4=2x^2+4x+6$

### Exercice 4457

Pour chacune des égalités suivantes, donner la valeur de $\alpha$ *(sans justification)*, puis vérifier l'égalité proposée :

a. $(x+2)^2-5=x^2+\alpha{\cdot}x-1$

b. $(x-3)^2+7=x^2-6x+\alpha$

c. $2(x+1)^2-9=\alpha{\cdot}x^2+4x-7$

d. $7(x-2)^2+1=7x^2+\alpha{\cdot}x+29$

e. $(x-5)^2+\alpha=x^2-10x+10$

f. $3(x+\alpha)^2+4=3x^2+48x+196$

## 4. Déterminer la forme canonique :

### Exercice 4458

Tout polynôme du second degré $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ admet une expression de la forme :

$f : x\mapsto\alpha{\cdot}\big(x-\beta\big)^2+\gamma$

où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont des nombres réels avec $\alpha\neq0$.
Cette expression s'appelle la **forme canonique**.

Associer à chacun des polynômes du second degré sa forme canonique :

| | |
|---|---|
| $4x^2+8x+7$ ∘ | ∘ $(x+2)^2-5$ |
| $x^2+4x-1$ ∘ | ∘ $(x-4)^2-4$ |
| $x^2-8x+20$ ∘ | ∘ $4(x+1)^2+3$ |
| $4x^2-16x+6$ ∘ | ∘ $4(x-2)^2-10$ |
| $-4x^2-16x-12$ ∘ | ∘ $(x-4)^2+4$ |
| $x^2-8x+12$ ∘ | ∘ $-4(x-2)^2+4$ |
| $-4x^2+16x-12$ ∘ | ∘ $-4(x+2)^2+4$ |

### Exercice 4456

Déterminer la forme canonique de chacun des polynômes du second degré suivants :

a. $x^2+2x-3$ b. $x^2-6x-2$

c. $x^2+12x+5$ d. $x^2-10x+5$

e. $x^2+4x$ f. $x^2-14x+9$

## *5. Forme canonique et équation :*

**Exercice 4410**

On considère l'expression : $(E)$ : $x^2{+}3x{+}10$

1. Déterminer l'expression de la forme canonique de $(E)$.
2. Déduire de la forme canonique de $(E)$ que l'équation ci-dessous n'admet pas de solution :

$$x^2+3x+10=0$$

**Exercice 7227**

On considère le polynôme $(P)$ : $x^2+6x+3$

1. Déterminer la forme canonique du polynôme $P$.
2. En déduire les solutions de l'équation : $x^2{+}6x{+}3=10$

## *6. Forme canonique et sens de variations :*

**Exercice 4407**

1. a. Déterminer la forme canonique de l'expression : $x^2-10x-2$

   b. Justifier que cette expression admet pour valeur minimale $-27$ et que cette valeur est atteinte en 5.

2. On considère l'expression $-2x^2{+}8x{+}1$ :

   a. Etablir l'égalité suivante : $-2x^2+8x+1=-2(x-2)^2+9$

   b. En déduire que cette expression atteint son maximum en $x{=}2$. Quelle est sa valeur maximale?

## *7. Forme canonique et étude de fonctions :*

**Exercice 4409**

On considère le polynôme du second degré : $(E)$ : $x^2{+}4x{-}12$

1. a. Justifier que le polynôme $(E)$ admet pour forme canonique : $(x{+}2)^2{-}16$.

   b. Justifier que le polynôme $(E)$ admet pour minimum $-16$.

2. a. Déduire de la question 1. a. la forme factorisée du polynôme $(E)$.

   b. En déduire les deux racines du polynôme $(E)$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ définie par : $f(x)=x^2+4x-12$

## *8. Calcul du discriminant :*

**Exercice 4459**

Le **discriminant** d'un polynôme $a{\cdot}x^2{+}b{\cdot}x{+}c$ du second degré est un nombre qui se calcule à l'aide des coefficients du polynôme :

$$\Delta=b^2-4{\times}a{\times}c$$

Compléter le tableau ci-dessous pour chacun des polynômes du second degré :

| | $a$ | $b$ | $c$ | $\Delta{=}b^2{-}4{\cdot}a{\cdot}c$ |
|---|---|---|---|---|
| $2x^2{+}5x{+}1$ | | | | |
| $-x^2{+}7x{+}3$ | | | | |
| $x^2{-}5x{+}4$ | | | | |
| $2x^2{-}4x{-}1$ | | | | |
| $-x^2{-}x{-}1$ | | | | |
| $x^2{+}7$ | | | | |

**Exercice 4408**

Déterminer le discriminant des polynômes du second degré ci-dessous :

a. $x^2+2x+4$ b. $2x^2+4x+1$ c. $x^2-2x+1$

d. $-2x^2+2x+1$ e. $x^2-x-1$ f. $3x^2+x-2$

## 9. Equation du second degré :

**Exercice 4411**

Les racines d'un polynôme sont les valeurs annulant ce polynôme.
Pour un polynôme $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ du second degré, le nombre de racines existantes dépend du discriminant :

| $\Delta<0$ | $\Delta=0$ | $\Delta>0$ |
|---|---|---|
| Aucune solution | 1 solution $-\dfrac{b}{2{\cdot}a}$ | 2 solutions $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$ ; $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$ |

Déterminer les racines des polynômes du second degré :

a. $x^2+2x-35=0$ b. $2x^2-5x+2=0$

c. $5x^2-3x+2=0$ d. $9x^2-24x+16=0$

e. $-2x^2+3x-5=0$ f. $-3x^2-x+4=0$

## 10. Equation et racines avec radicaux :

**Exercice 4412**

Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2-4x-3=0$ b. $2x^2-3x-2=0$

c. $2x^2-4x-8=0$ d. $x^2-3x+1=0$

## 11. Factorisation :

**Exercice 4413**

La factorisation d'un polynôme $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ du second degré dépend de la valeur de son discriminant :

| $\Delta<0$ | $\Delta=0$ | $\Delta>0$ |
|---|---|---|
| Aucune factorisation | $a{\cdot}\Big(x+\dfrac{b}{2{\cdot}a}\Big)^2$ | $a{\cdot}\big(x-\alpha\big)\big(x-\beta\big)$ où $\alpha$ et $\beta$ sont les deux racines du polynômes |

Factoriser, si possible, les expressions suivantes :

a. $x^2+4x+3$ b. $5x^2-4x-1$ c. $3x^2+4x+1$

d. $4x^2+3x+4$ e. $12x^2+36x+27$ f. $3x^2+3x+4$

**Exercice 4416**

Factoriser, si possible, les polynômes du second degré ci-dessous :

a. $3x^2+4x+1$ b. $-3x^2+4x-1$ c. $-4x^2+5x$

d. $-4x^2+12x-9$ e. $x^2+2x+1$ f. $3x^2-4x+2$

**Exercice 4414**

On considère le polynôme du second degré $(E)$ : $x^2+3x+3$.

1. Déterminer le discriminant du polynôme $(E)$.
2. En effectuant un raisonnement par l'absurde et en supposant que l'expression $(E)$ admette la forme factorisée :
   $(E)$ : $a(x-\alpha)(x-\beta)$
   Etablir que l'expression $(E)$ n'admet pas de forme factorisée.

## 12. Tableau de signes et inéquations :

## Exercice 4417

Le tableau de signe d'un polynôme du second degré dépend du signe du coefficient du terme du second degré et du signe du discriminant.
Les six possibilités sont représentées ci-dessous :

| | $\Delta<0$ | $\Delta=0$ | $\Delta>0$ ($\alpha$ et $\beta$ sont les deux racines) |
|---|---|---|---|
| $a>0$ | $x$ : $-\infty$ ; $+\infty$ — Signe : $+$ | $x$ : $-\infty$ ; $-b/2a$ ; $+\infty$ — Signe : $+$ 0 $+$ | $x$ : $-\infty$ ; $\alpha$ ; $\beta$ ; $+\infty$ — Signe : $+$ 0 $-$ 0 $+$ |
| $a<0$ | $x$ : $-\infty$ ; $+\infty$ — Signe : $-$ | $x$ : $-\infty$ ; $-b/2a$ ; $+\infty$ — Signe : $-$ 0 $-$ | $x$ : $-\infty$ ; $\alpha$ ; $\beta$ ; $+\infty$ — Signe : $-$ 0 $+$ 0 $-$ |

Dresser le tableau de signe de chacune des expressions suivantes :

a. $2x^2+x-1$ b. $-3x^2+2x+1$ c. $2x^2-1$

d. $4x^2-3x-1$ e. $-x^2-x-1$ f. $-x^2-4x-1$

A la question f., on pourra donner les valeurs approchées au centième des racines.

## Exercice 4460

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $x^2-3x+2>0$ b. $x^2-x-2<0$

c. $-9x^2+12x-4\leqslant 0$ d. $5x^2+4x-1<0$

e. $-4x^2+2x+2\geqslant 0$ f. $-x^2+x-3>0$

## Exercice 7221

1. Résoudre l'équation ci-dessous en donnant les réponses arrondies au centième près :

$$3{\cdot}x^2+x-1=0$$

2. Donner la forme factorisée des expressions suivantes :

a. $3{\cdot}x^2-3{\cdot}x-6$ b. $12{\cdot}x^2+12{\cdot}x+3$

3. Résoudre les inéquations :

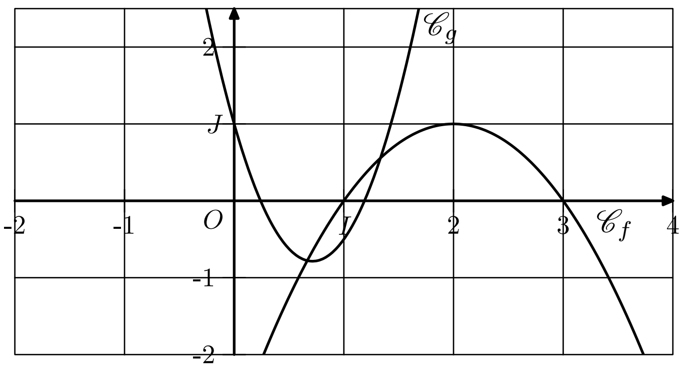
a. $6{\cdot}x^2+x-1\geqslant 0$ b. $3{\cdot}x^2+x+1<0$

# 13. Etude de fonctions :

## Exercice 4471

Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$, on considère les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions $f$ et $g$ définies par :

$$f(x)=-x^2+4{\cdot}x-3 \quad ; \quad g(x)=\frac{7}{2}{\cdot}x^2-5x+1$$




Les questions ci-dessous doivent être traitées algébriquement :

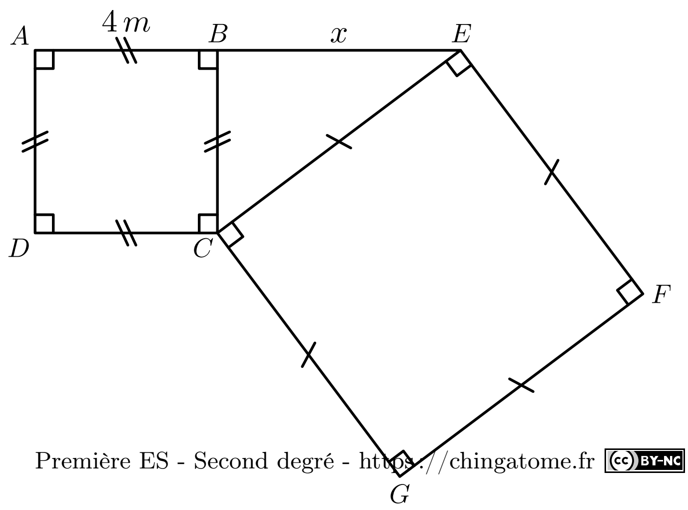
1. Déterminer les antécédents de 0 par les fonctions $f$ et $g$. On donnera les arrondies au centième près.

2. Déterminer la position relative de ces deux courbes.

# 14. Problèmes :

## Exercice 4423

Un champ est composé de deux carrés et d'un triangle rectangle. On a représenté ce champ dans la figure ci-dessous :



1. Justifier que l'aire $\mathcal{A}$ du champ a pour valeur en fonction de $x$ :
$\mathcal{A}(x) = x^2 + 2x + 32$

2. En déduire la valeur de la longueur $x$ afin que l'aire totale du champ soit de $200\,m^2$.