

Première ES / Fonctions dérivées et études de fonctions

1. Rappels :

Exercice 4829

Déterminer l'expression des fonctions dérivées associées à chacun des fonctions suivantes :

a. $f(x) = 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1$ b. $g(x) = 5 \cdot x^6 - 3 \cdot x^3 - 4$

c. $h(x) = 5 + \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ d. $j(x) = \frac{1}{x^5 + 1}$

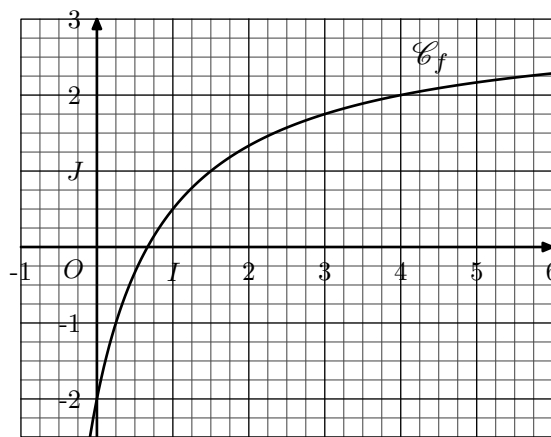
e. $k(x) = \frac{5 \cdot x - 2}{3 \cdot x + 1}$ f. $l(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{2 \cdot x + 1}$

Exercice 4830

On considère la fonction f définie sur $] -1; +\infty[$ et dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{3x - 2}{x + 1}$$

Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f :



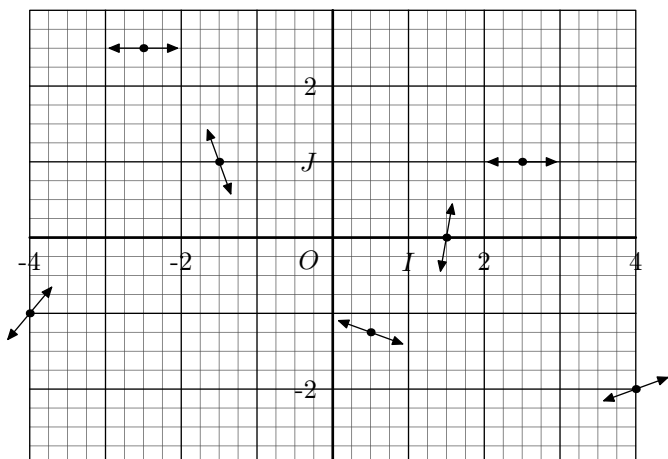
On note (d) la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.

- Déterminer l'équation réduite de la droite (d) .
- Tracer la tangente (d) dans le repère $(O; I; J)$.

2. Introduction à l'étude des variations :

Exercice 4828

Tracer la courbe représentative d'une fonction passant par tous les points indiqués et respectant en chacun d'eux la tangente représentée :

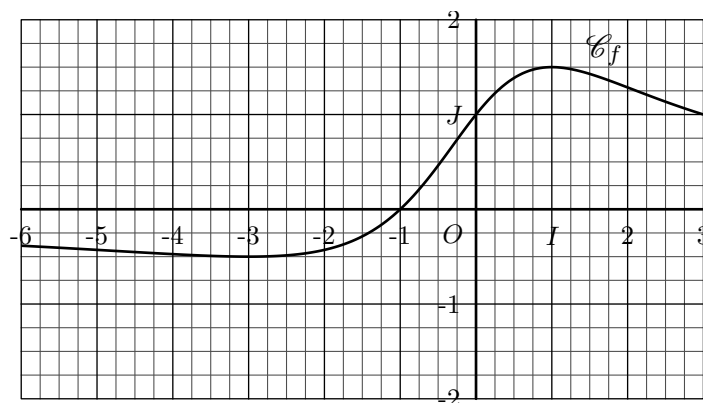


Exercice 4841

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{3x + 3}{x^2 + 3}$$

Dans un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on donne la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f :



- Justifier que la fonction f est définie sur \mathbb{R} .
- A l'aide de sa représentation graphique, dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-6; 3]$ (par lecture graphique, on utilisera des valeurs approchées).
- a. Etablir l'expression suivante de la fonction f'

dérivée de la fonction f :

$$f'(x) = \frac{-3x^2 - 6x + 9}{(x^2 + 3)^2}$$

- Etudier le tableau de signe de la fonction f' sur \mathbb{R} .
- Quelle conjecture peut-on faire entre le signe de la fonction dérivée f' et du sens de variation de la fonction f .

3. Tableau de signes et de variations : graphiquement :

Exercice 4772



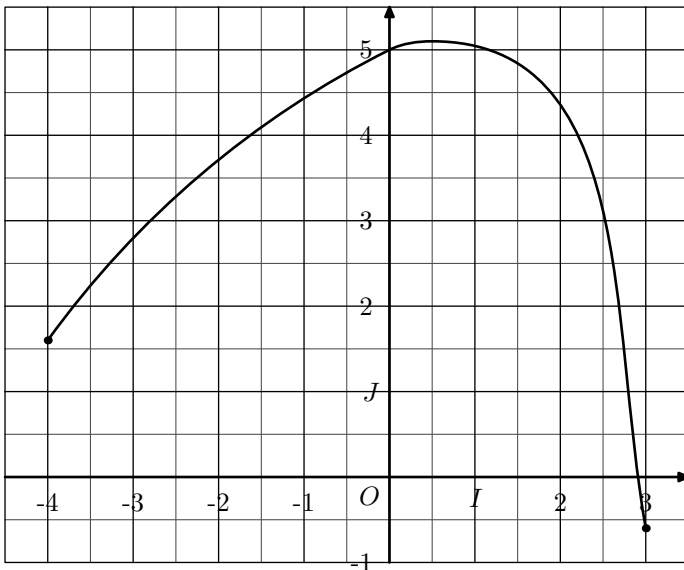
On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4; 3]$, et l'on note f' la fonction dérivée de f .

La courbe représentative de f est la courbe Γ donnée ci-dessous.

On admet que la courbe Γ possède les propriétés suivantes :

- La courbe Γ passe par le point $A(0; 5)$;
- La tangente en A à la courbe Γ passe par le point $B(-2; 4)$;
- La courbe Γ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse $0,5$.

En outre, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-4; 0,5]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[0,5; 3]$.



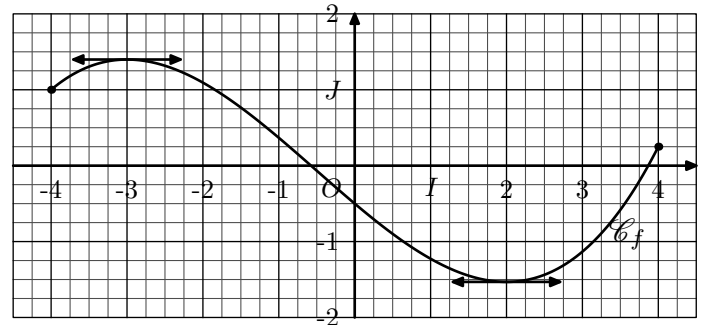
- Placer les points A et B et tracer la tangente en A à la courbe Γ .
- Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$, et donner pour chaque solution un encadrement par deux entiers consécutifs.
- a. Donner $f'(0)$ (aucune justification n'est demandée).
b. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$. Justifier votre réponse.
c. Résoudre l'inéquation : $f'(x) \leq 0$.

Exercice 4857



On considère le fonction f définie sur $[-4; 4]$ dont la courbe

représentative \mathcal{C}_f est donnée ci-dessous :



Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera, le cas échéant, des valeurs arrondies obtenues par lecture graphique.

- Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- Dresser le tableau de signe de la fonction f' dérivée de la fonction f .

Exercice 4858



On considère une fonction f définie sur $[-3; 5]$ dont la dérivée admet le tableau de signe suivant :

x	-3	-1	2	5	
Signe de f'	+	0	-	0	+
Variation de f					

On a les valeurs et relations suivantes :

- $f(-1) = 3$
- $f(5) = -2 \cdot f(-1)$
- $f(-3) = f(5) + 5$
- $f(2) = f(-1) \cdot f(5)$

Dans le tableau précédent, compléter la ligne correspondant aux variations de la fonction f .

Exercice 3004



Le tableau ci-dessous représente le tableau de variations d'une fonction f définie sur \mathbb{R} :

x	$-\infty$	-4	-2	-1	2	$+\infty$
Signe de f'						
Variation de f		$\nearrow 5$	$\searrow 0$	$\nearrow -\frac{1}{2}$	$\searrow -3$	

4. Polynôme : étude de fonctions :

Exercice 4850

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ dont l'image d'un nombre réel x est donnée par la formule :

$$f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 3$$

- Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f .
- Etablir le tableau de signe de la fonction f' .
- Dresser le tableau de variations de la fonction f .

Exercice 4851

On considère la fonction f définie sur $[-4; 5]$ par la relation :

$$f(x) = -2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 2$$

- Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f .
- Etablir le signe de la fonction f' sur $[-4; 5]$.
- Dresser le tableau de variations de la fonction f .

Exercice 1756

Chacune des fonctions ci-dessous est définie sur \mathbb{R} . Etudier les variations de chacune de ces fonctions :

- $f(x) = x^3 - 9 \cdot x^2 + 15 \cdot x - 7$
- $g(x) = -x^3 - 3 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 3$
- $h(x) = -\frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x - 1$

5. Polynôme : problèmes :

Exercice 7783

Une entreprise fabrique chaque jour des pièces métalliques pour l'industrie automobile. La production quotidienne varie entre 0 et 25 pièces.

Le montant des charges correspondant à la fabrication de x pièces, exprimé en euros, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0; 25]$ par :

$$C(x) = x^3 - 30 \cdot x^2 + 400 \cdot x + 100$$

On suppose que l'entreprise vend chaque jour sa production

- Compléter correctement la ligne correspondant au signe de la fonction dérivée f' .
- Sur lesquels de ces intervalles, la fonction f est soit positive, soit négative. Préciser alors son signe.
 - $[-1; 2]$
 - $[-4; -1]$
 - $]-\infty; -1]$

(on indiquera dans le tableau de variations les valeurs des extrémums locaux)

Exercice 4842

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = -x^3 + 3 \cdot x^2 + 9 \cdot x - 2$$

- Etablir l'égalité : $f(x) = (x+2)(-x^2+5 \cdot x-1)$
 - Dresser le tableau de signe de la fonction f .
- Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f .
 - Dresser le tableau de signe de la fonction f' .
 - Dresser le tableau de variations de la fonction f .

Exercice 4843

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = x^3 + 3 \cdot x^2 - 9 \cdot x + 5$$

- Déterminer la valeur des réels a , b et c réalisant l'égalité : $f(x) = (x+5)(a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$
 - Dresser le tableau de signe de la fonction f .
- Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f .
 - Dresser le tableau de signe de la fonction f' .
 - Dresser le tableau de variations de la fonction f .

journalière. Chaque pièce est vendue au prix de 247 euros.

- On note B la fonction bénéfice, exprimée en euros. Justifier que l'expression de $B(x)$ sur l'intervalle $[0; 25]$ est :

$$B(x) = -x^3 + 30 \cdot x^2 - 153 \cdot x - 100$$
- On note B' la fonction dérivée de la fonction B . Calculer $B'(x)$, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; 25]$.
- Justifier le tableau suivant :

x	0	3	17	$+\infty$	
Signe de $B'(x)$	-	0	+	0	-

- En déduire le tableau de variations complet de la fonction B sur l'intervalle $[0; 25]$.
- Déterminer le nombre de pièce que l'entreprise doit produire chaque jour pour que le bénéfice réalisé soit maximal. Que vaut alors ce bénéfice maximal?

Exercice 7784



Une entreprise produit et vend un tissu en coton de forme rectangulaire de 1 mètre de large ; on note x sa longueur exprimée en kilomètre, x étant un nombre compris entre 0 et 10.

Le coût total de production en euro de ce tissu est donné, en fonction de x , par :

$$C(x) = 15 \cdot x^3 - 120 \cdot x + 350 \cdot x + 1000$$

Le cours du marché offre un prix de 530 € le kilomètre de tissu fabriqué par l'entreprise.

Pour tout $x \in [0; 10]$, on note $R(x)$ la recette et $B(x)$ le bénéfice générés par la production et la vente de x kilomètres de tissu par l'entreprise.

- Exprimer $R(x)$ en fonction de x .
- Montrer que pour tout $x \in [0; 10]$:

$$B(x) = -15 \cdot x^3 + 120 \cdot x^2 + 180 \cdot x - 1000$$
- Déterminer $B'(x)$ pour $x \in [0; 10]$ où B' désigne la fonction dérivée de B .
- Etudier le signe de $B'(x)$ et en déduire les variations de la fonction B sur $[0; 10]$.
- Pour quelle longueur de tissu produit et vendu l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice maximal?
 - Donner alors la valeur de ce bénéfice maximal?

Exercice 4889



Dans un cadre économique, on appelle fonction de satisfaction une fonction f définie et dérivable sur une partie de \mathbb{R} et à valeurs dans l'intervalle $[0; 100]$.

On dit qu'il y a "saturation" lorsque la fonction de satisfaction prend la valeur 100.

La fonction v , dérivée de la fonction f , est appelée fonction "envie". On a donc :

$$v = f'$$

On dit qu'il y a "envie" lorsque v est positive, sinon on dit qu'il y a "rejet".

6. Quotient : variations :

Exercice 4848



On considère la fonction f dont l'image d'un nombre réel x est donnée par la relation :

$$f(x) = \frac{2-x}{x^2+5}$$

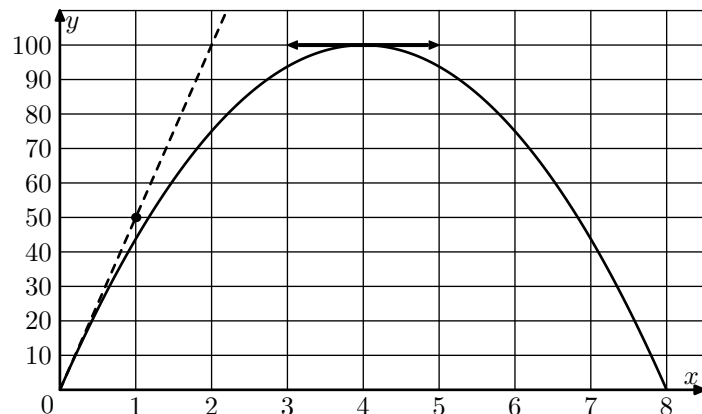
- Montrer que la fonction f' dérivée de la fonction f ad-

Charlotte doit rédiger un mémoire de recherche. Elle souhaite connaître la durée quotidienne de travail qui lui convient le mieux, sachant qu'elle a la possibilité d'y consacrer entre 0 et 8 heures par jour.

En début de journée, elle est de plus en plus efficace, mais après un certain temps sa productivité ne la satisfait plus.

Elle modélise son taux de satisfaction en fonction du nombre d'heures x passées quotidiennement à travailler.

La courbe représentant sa satisfaction f est donnée ci-dessous.



La tangente à cette courbe au point d'abscisse 4 est parallèle à l'axe des abscisses.

La courbe passe par l'origine du repère et la tangente en ce point passe par le point de coordonnées (1; 50).

- Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :
 - Pour quelle durée de travail quotidien y a-t-il "saturation"?
 - Sur quel intervalle y a-t-il "envie"?
 - Sur quel intervalle y a-t-il "rejet"?
 - Donner $v(4)$.

On admettra que la fonction v est ici une fonction affine définie sur l'intervalle $[0; 8]$.

- Justifier que son expression est : $v(x) = -\frac{25}{2} \cdot x + 50$
- Justifier que la fonction f admet pour expression :

$$f(x) = -\frac{25}{4} \cdot x^2 + 50 \cdot x + c \quad \text{où } c \in \mathbb{R}$$
 - Déterminer la valeur du nombre réel c .
- En déduire les valeurs de x pour lesquelles la satisfaction prend la valeur 75.

met pour expression :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4 \cdot x - 5}{(x^2 + 5)^2}$$

- Dresser le tableau de signe de la fonction f'
- Dresser le tableau de variations de la fonction f (on notera la valeur exacte des extrêmes locaux).

7. Quotient: variations et signes :

Exercice 4847



On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{3 \cdot x + 3}{x^2 + 3}$$

- Dresser le tableau de signe de la fonction f .
- Montrer que la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{-3 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 9}{(x^2 + 3)^2}$$

- Dresser le tableau de signe de la fonction f' .
 - Dresser le tableau de variations de la fonction f . (on indiquera les valeurs exactes des extrémums locaux)

Exercice 4846



On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2 \cdot x + 1}{x - 1}$$

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Etablir l'égalité suivante :

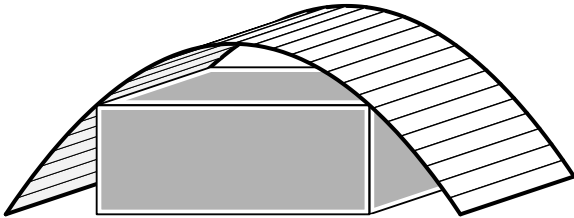
$$f'(x) = \frac{x^2 - 2 \cdot x - 3}{(x - 1)^2}$$
- Etablir le tableau de signe de la fonction f' sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
 - Dresser le tableau de variations de la fonction f . On indiquera la valeur exacte des deux extrémums locaux de cette fonction.
- Déduire de l'ensemble des questions précédentes le tableau de signe de la fonction f .

8. Problème d'optimisation :

Exercice 4863

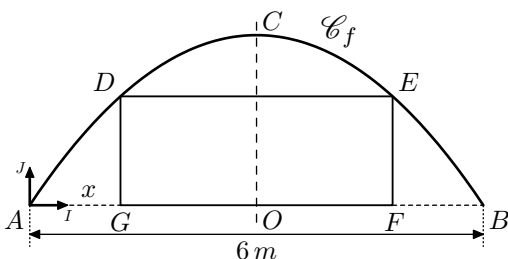


Sous un hangar, dont le toit est de forme "parabolique", on souhaite installer une habitation de forme parallélépipédique. Le dessin ci-dessous illustre le problème :



On suppose l'habitat s'étalant sur toute la longueur du hangar. Le but de cet exercice est de déterminer les dimensions de la façade de cet habitat afin d'en maximaliser le volume.

On modélise ce problème par la figure ci-dessous :



Le rectangle $DEFG$ admet la droite (CO) pour axe de symétrie. On note x la mesure de la longueur AG .

Dans le repère $(A; I; J)$, la courbe \mathcal{C}_f est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0; 6]$ par la relation :

$$f(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{3}{2} \cdot x$$

On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du rectangle $DEFG$ en fonction de x .

- Le point G appartenant au segment $[AO]$, quelles sont les valeurs possibles pour la variable x ?
- Démontrer que pour $x \in [0; 3]$:

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2} \cdot x^3 - \frac{9}{2} \cdot x^2 + 9 \cdot x$$
- Déterminer le tableau de variations de la fonction \mathcal{A} sur l'intervalle $[0; 3]$.
 - En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle $DEFG$ est maximale.

Exercice 4885

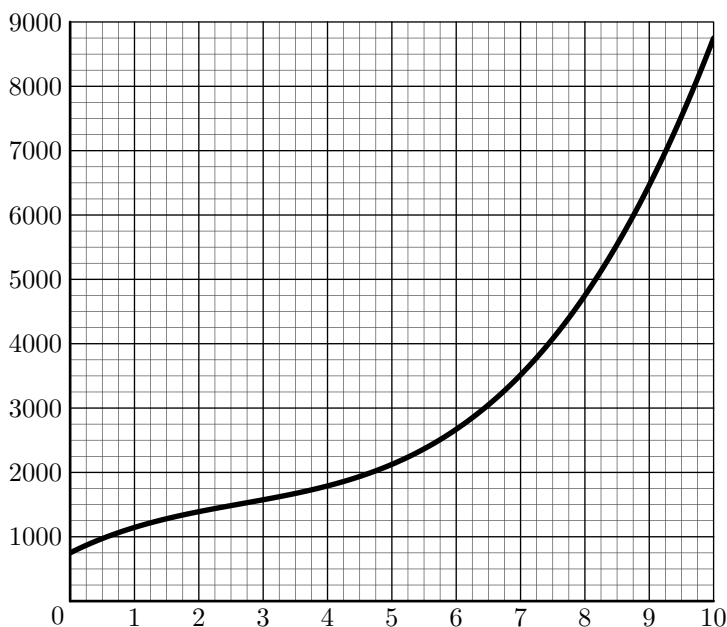


L'entreprise CoTon produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en 1 mètre de large et pour une longueur x exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.

Le coût total de production en euros de l'entreprise CoTon est donné en fonction de la longueur x par la formule :

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750.$$

Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique de la fonction C .



Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A : Etude du bénéfice

Si le marché offre un prix p en euros pour un kilomètre de ce tissu, alors la recette de l'entreprise CoTon pour la vente d'une quantité x est égal à $R(x) = p \cdot x$.

- Tracer sur le graphique la droite D_1 d'équation : $y = 400 \cdot x$.

Expliquer, au vu de ce tracé, pourquoi l'entreprise CoTon ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix p du marché est égal à 400 euros.

- Dans cette question on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros.

- Tracer sur le graphique la droite D_2 d'équation : $y = 680 \cdot x$.

Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise CoTon réalise un bénéfice si le prix p du marché est de 680 euros.

- On considère la fonction B définie sur l'intervalle $]0; 10[$ par :

$$B(x) = 680 \cdot x - C(x)$$

Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; 10[$, on a :

$$B'(x) = -45 \cdot x^2 + 240 \cdot x + 180$$

- Etudier les variations de la fonction B sur $]0; 10[$. En déduire pour quelle quantité produite et vendue le bénéfice réalisé par l'entreprise CoTon est maximum. Donner la valeur de ce bénéfice.

Partie B : étude du coût moyen

On rappelle que le coût moyen de production C_M mesure le

coût par unité produite. On considère la fonction C_M définie sur l'intervalle $]0; 10[$ par :

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$$

- Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; 10[$, on a :

$$C'_M(x) = \frac{30 \cdot (x - 5)(x^2 + x + 5)}{x^2}$$

- Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; 10[$, $C'_M(x)$ est du signe de $(x - 5)$. En déduire les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $]0; 10[$.
 - Pour quelle quantité de tissu produite le coût moyen de production est-il minimum? Que valent dans ce cas le coût moyen de production et le coût total?

Exercice 379

Un supermarché souhaite acheter des fruits à un fournisseur. Ce fournisseur propose des prix au kilogramme, dégressifs en fonction du poids de fruits commandé.

Pour une commande de x kilogrammes de fruit, le prix $P(x)$ en euros du kilogramme de fruits est donné par la formule :

$$P(x) = \frac{x + 300}{x + 100} \quad \text{pour } x \in [100; +\infty[.$$

Par exemple si le supermarché achète 300 kilogrammes de fruits, ces fruits lui sont vendus :

$$P(300) = \frac{600}{400} = 1,50 \text{ euros le kilogramme.}$$

Dans ce cas, le supermarché devra payer $300 \times 1,5 = 450$ euros au fournisseur pour cette commande.

Partie A : Etude du prix P proposé par le fournisseur.

- Montrer que : $P'(x) = -\frac{200}{(x+100)^2}$ sur $[100; +\infty[$.

- Donner le sens de variations de la fonction P sur $[100; +\infty[$.

Partie B : Etude de la somme S à dépenser par le supermarché.

On appelle $S(x)$ la somme en euros à dépenser par le supermarché pour une commande de x kilogrammes de fruits (ces fruits vendus par le fournisseur au prix de $P(x)$ euros par kilogramme).

Cette somme est donc égale à :

$$S(x) = x \cdot P(x) \quad \text{pour } x \in [100; +\infty[.$$

- Montrer que pour tout x appartenant à $[100; +\infty[$:

$$S'(x) = \frac{x^2 + 200 \cdot x + 30\,000}{(x + 100)^2}$$

- Montrer que pour tout x appartenant à $[100; +\infty[$:

$$S(x) = x + 200 - 20\,000 \times \frac{1}{x + 100}$$

9. Variations et tableaux de signes :

Exercice 4856

- On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} admettant

une dérivée strictement positive sur \mathbb{R} . De plus, on a l'information : $f(2) = 0$.

Dresser le tableau de signe de la fonction f sur \mathbb{R} .

2. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} admettant une dérivée g' vérifiant :
Pour tout réel x , on a : $g'(x) < 0$

De plus, on sait que : $g(-3) = 0$.

Dresser le tableau de signe de la fonction g sur \mathbb{R} .